Repetisjon

Oppgave 1 (Kont 2024 P1)

La $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2 - 3x_1 - 3x_2 + 3,$$

der Ω er trekanten med hjørner i $(0,0)^T$, $(3,0)^T$ og $(3,4)^T$.

a) Finn tangentplanet til f i punktet $(2,3)^T$.

b) Finn volumet under grafen til f.

c) Finn og klassifiser det kritiske punktet til f.

d) Finn den største og minste verdien til f på Ω.

Oppgave 2 (Kont 2024 P4)

En flate er gitt ved funksjonen $\mathbf{z} : D \to \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{z}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} z_1(x_1, x_2) \\ z_2(x_1, x_2) \\ z_3(x_1, x_2) \end{pmatrix}$$

der $D \subset \mathbb{R}^2$. Forklar hvorfor arealet av denne flaten blir

$$\iint_D \left| \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_1} \times \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial x_2} \right| \mathrm{d}\mathbf{x}.$$

Vis at overflatearealet til en kule med radius r er $A = 4\pi r^2$.

Oppgave 3 (Kont 2024 P7)

Regn ut

$$\int_\Gamma z^n \, \mathrm{d}z$$

for alle $n \in \mathbb{Z}$, der Γ er enhetssirkelen i det komplekse planet.

Linjeintegraler

Over skalarfelt

La $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Da er linjeintegralet til f over Γ gitt ved

$$\int_\Gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(x(t))|x'(t)| \, \mathrm{d}t.$$

Over vektorfelt

La $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Γ parametrisert ved $x : [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Da er linjeintegralet til F over Γ gitt ved

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}s = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t) \, \mathrm{d}t.$$

Spesialtilfelle: Konservativt vektorfelt. Dersom F er et konservativt vektorfelt, altså at det fins en skalarfunksjon $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ slik at $F = \nabla \varphi^T$, så er linjeintegralet av F uavhengig av hvordan vi kommer oss fra a til b. Da har vi at

$$\int_\Gamma F \cdot \mathrm{d}s = \varphi(b) - \varphi(a).$$

Komplekse linjeintegraler

La $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Γ parametrisert ved $z : [a, b] \to \mathbb{C}$. Da er det komplekse linjeintegralet til f over Γ gitt ved

$$\int_\Gamma f(z) \, \mathrm{d}z = \int_a^b f(z(t)) z'(t) \, \mathrm{d}t.$$

Flateintegraler

Over skalarfelt

La $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Σ parametrisert ved $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Da er flateintegralet til f over Σ gitt ved

$$\iint_\Sigma f \, \mathrm{d}S = \iint_\Omega f(g(x)) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \mathrm{d}x.$$

Over vektorfelt

La $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. Σ parametrisert ved $g : \Omega \to \mathbb{R}^3$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$. Da er flateintegralet til F over Σ gitt ved

$$\iint_\Sigma F \cdot \mathrm{d}S = \iint_\Omega F(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \, \mathrm{d}x.$$

Lykke til på eksamen:)