18. oktober 2024

Uke 42: Linjeintegraler II

Skal linjeintegrere funksjoner $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Det komplekse linjeintegralet er gitt ved

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt$$

hvor Γ er parametrisert ved $z(t)$ $a \leq t \leq b$.

Husk: En funksjon $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gitt ved $f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + iv(x,y)$ er deriverbar hvis og bare hvis Cauchy-Riemann likningene er oppfylt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

(Analytisk $\Leftrightarrow$ kan skrives som Taylor-rekke)

(For komplekse funksjoner har vi at deriverbar $\Rightarrow$ analytisk)

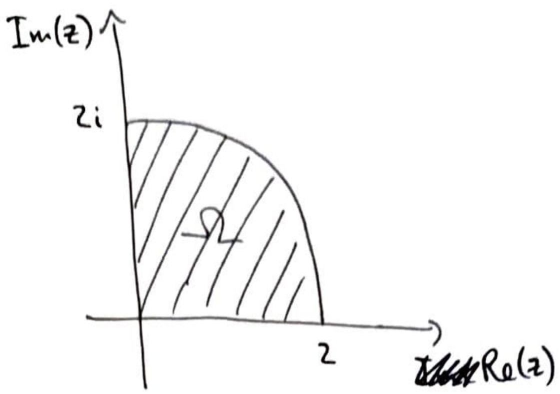
(Komplekse analytiske funksjoner blir noen steder kalt holomorfe)

Cauchys integralteorem: Dersom f er deriverbar på et område Ω og Γ er en stykkevis glatt kurve i Ω, så er

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0.$$

(sirkelen over integraltegnet er kun for å presisere at Γ er en lukket kurve).

1) Skal finne bildet $(f(\Omega))$ av Ω.



a) La oss bruke kompakt polarform $z = re^{i\theta}$.
Tallene i Ω er på formen $re^{i\theta}$ hvor $0 \le r \le 2$ og $0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$.

$$f(z) = z^2 = (re^{i\theta})^2 = r^2 e^{2i\theta}$$ ← hvor $0 \le r \le 2,\ 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}$

Merk: dette er et nytt komplekst tall med radius $\rho = r^2$ og argument $\varphi = 2\theta$
Grensene for ρ og φ finner vi fra grensene for r og θ.

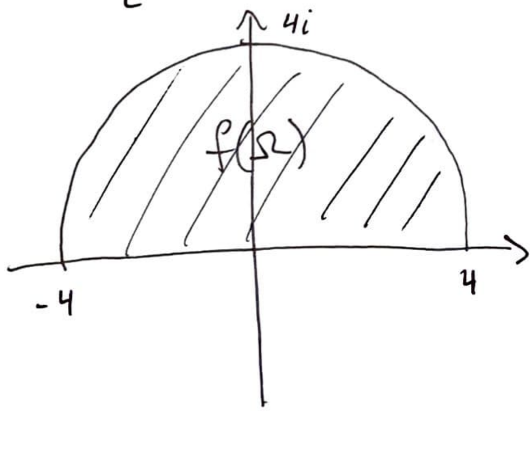
kvadrerer (positive verdier)

$$0 \le r \le 2 \Rightarrow 0^2 \le r^2 \le 2^2 \Rightarrow 0 \le \rho \le 4$$

$$0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \Rightarrow 2\cdot 0 \le 2\theta \le 2\cdot\frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 \le \varphi \le \pi$$

ganger med 2

Så $f(\Omega) = \{\rho e^{i\varphi} : 0 \le \rho \le 4,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$



b) Lignende fremgangsmåte som tidligere

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{1}{re^{i\theta}} = \frac{1}{r}e^{-i\theta} \qquad 0 < r \leq 2 \ , \ 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Dette er et nytt komplekst tall med radius $\rho = \frac{1}{r}$ og argument $\varphi = -\theta$

$$0 < r \leq 2 \Rightarrow \text{"}\frac{1}{0}\text{"} > \frac{1}{r} \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} \leq \rho < \infty$$

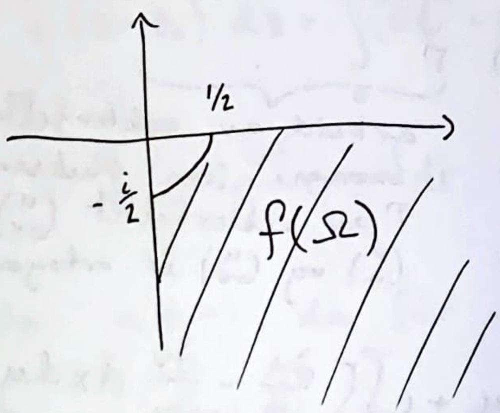
↑ tar inversen ↳ ulikheter flippes

↳ her er vi litt late med notasjon, skulle vel vært litt $\lim_{r \to 0}$ her og der

$$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -0 \geq -\theta \geq -\frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0$$

↑ ganger med −1 ↳ ulikheter flippes

Så $f(\Omega) = \{\rho e^{i\varphi} : \frac{1}{2} \leq \rho < \infty, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq 0\}$



2) Vi har $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ gitt ved $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$

f er deriverbar, så $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$ og $\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$.

Vi skal beregne $\oint_\Gamma f(z)\,dz$ for en lukket kurve Γ.

$$\oint_\Gamma f(z)\,dz = \oint_\Gamma (u+iv)(dx + i\,dy)$$

$$= \oint_\Gamma (u\,dx + iu\,dy + iv\,dx - v\,dy)$$

samler real- og imaginærdel slik at vi har reelle integraler

$$= \oint_\Gamma (u\,dx - v\,dy) + i\oint_\Gamma (v\,dx + u\,dy)$$

$$= \underbrace{\oint_\Gamma (u,-v)^T \cdot \underset{ds = \binom{dx}{dy}}{\underbrace{ds}}}_{\text{arbeid av vektorfeltet } \binom{u}{-v}} + i \underbrace{\oint_\Gamma (v,u)^T \cdot ds}_{\text{arbeid av vektorfeltet } \binom{v}{u}}$$

arbeid av vektorfeltet $\binom{v}{u}$, samme som fluksen ut av Γ av vektorfeltet $\binom{u}{-v}$, siden $\binom{v}{u}$ og $\binom{u}{-v}$ er ortogonale.

La $\Gamma = \partial\Omega$ for et område Ω

Greens teorem

$$= \iint_\Omega -\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy + i\iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy$$

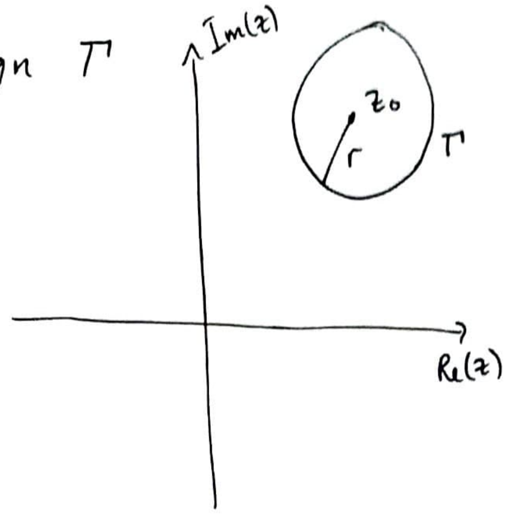
$$= \iint_\Omega \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u}{\partial y}\,dx\,dy + i\iint_\Omega \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial y}\,dx\,dy$$

$$= 0 + i\,0$$

$$= 0$$

Så: $\oint_\Gamma f(z)\,dz = 0$

3) Tegn Γ



La $n \in \mathbb{Z}$ og $r > 0$

Vi skal beregne

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n \, dz$$

Komplekst linjeintegral: $\displaystyle\int_{\Gamma} f(z)\, dz = \int_a^b f(z(t))\dot{z}(t)\, dt$

Parametrisere Γ : $z(t) = re^{it} + z_0$ for $t \in [0, 2\pi)$

(merk: r og z_0 er gitt, de er altså ikke parametre i parametriseringen)

Dette gir $\dot{z}(t) = ire^{it}$, så vi får

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n \, dz = \int_0^{2\pi} (re^{it} + z_0 - z_0)^n \cdot ire^{it}\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} r^n e^{int} \cdot ire^{it}\, dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t}\, dt$$

Anta $n \neq -1$, da får vi

$$= ir^{n+1} \cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

For $n = -1$ får vi

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^0\, dt = ir^0 \int_0^{2\pi} dt = \underline{\underline{i \cdot 2\pi}}$$

så

$$\oint_{\Gamma} (z - z_0)^n \, dz = \begin{cases} 0 & n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\} \\ 2\pi i & n = -1 \end{cases}$$

4) Skal beregne $\oint_\Gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz.$

Trenger : $\int_\Gamma f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\,\dot{z}(t)\,dt$

Parametrisere Γ : $z(t) = e^{it} + 1 \qquad t \in [0, 2\pi)$

Så : $\dot{z}(t) = ie^{it}$

Vi får

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z^2-1}\,dz = \oint_\Gamma \frac{1}{(z-1)(z+1)}\,dz$$

delbrøksoppspalting

$$= \frac{1}{2}\oint_\Gamma \frac{1}{z-1}\,dz - \frac{1}{2}\oint \frac{1}{z+1}\,dz$$

Cauchys integralteorem, siden $\frac{1}{z+1}$ er analytisk på området omsluttet av Γ

$$= \frac{1}{2}\oint_\Gamma \frac{1}{z-1}\,dz - 0$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}+1-1} \cdot ie^{it}\,dt$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it}} \cdot e^{it}\,dt$$

$$= \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} dt$$

$$= \underline{\underline{\pi i}}$$

5) Skal beregne $\oint_\Gamma e^{\frac{1}{z}} dz$

Vi har at $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \Rightarrow e^{\frac{1}{z}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!}$

Så:

$$\oint_\Gamma e^{\frac{1}{z}} dz = \oint_\Gamma \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{z^n n!} dz$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \oint_\Gamma \frac{1}{z^n} dz$$

$$= \underbrace{\oint_\Gamma dz}_{n=0} + \underbrace{\oint_\Gamma \frac{1}{z} dz}_{n=1} + \underbrace{\frac{1}{2}\oint_\Gamma \frac{1}{z^2} dz}_{n=2} + \underbrace{\frac{1}{3!}\oint_\Gamma \frac{1}{z^3} dz}_{n=3} + \cdots \quad \ldots$$

fra oppgave 3 med $z_0=0$, $r=1$

$$= 0 + \oint_\Gamma \frac{1}{z} dz + 0 + 0 + \cdots$$

fra oppgave 3

$$= \underline{\underline{2\pi i}}$$

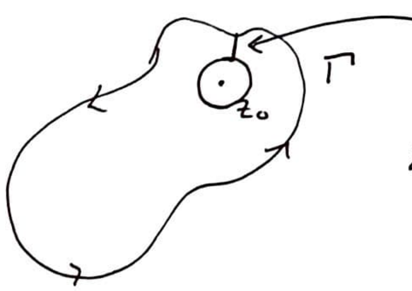
6) Figur 1 og 4 er samme tilfelle. Figur 2 og 3 er samme tilfelle.

2 og 3: z_0 ligger utenfor området omsluttet av Γ, så $f(z) = (z-z_0)^n$ er analytisk på hele området omsluttet av Γ, så Cauchys integralteorem gir

$$\int_\Gamma (z-z_0)^n \, dz = 0 \quad \text{i figur 2 og 3}$$

1 og 4: f er analytisk på hele området utenom i z_0 når $n=-1$. For $n \neq -1$ blir integralet 0, fra Cauchys integralteorem. Så anta $n=-1$.

Vi prøver å "isolere" punktet z_0, ved å lage en bitteliten sirkel med radius $r>0$ rundt (så liten at sirkelen ligger inni området omsluttet av Γ).



vi trekker nå linjen mellom Γ og sirkelen rundt z_0.

La:

ℓ være sirkelen rundt z_0

Γ' være Γ inkludert linjen mellom ℓ og Γ.

Da får vi

$$\oint_\Gamma \frac{1}{z-z_0} \, dz = \oint_{\Gamma'} \frac{1}{z-z_0} \, dz + \oint_{\ell} \frac{1}{z-z_0} \, dz$$

Siden vi både går "til og fra" ℓ fra Γ nulles dette ut. (Litt vanskelig å forklare skriftlig, forhåpentligvis gir det mening når jeg forklarer det muntlig på mandag)

:)

Så:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{z-z_0}\,dz = \oint_{\Gamma'} \frac{1}{z-z_0}\,dz + \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

Γ' omslutter ikke z_0, så vi kan bruke Cauchys integralteorem

$$= 0 + \oint_{\mathcal{C}} \frac{1}{z-z_0}\,dz$$

fra oppgave 3

$$= 2\pi i$$

Oppsummert

Figur 2 og 3: integralet er 0 for alle $n \in \mathbb{Z}$

Figur 1 og 4: integralet er 0 for alle $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$ og lik $2\pi i$ når $n = -1$.

OBS: Sorry for ingen lyd i dag :(Hvis det er noen spørsmål er det, som alltid, bare å sende meg en mail: astrimys@stud.ntnu.no