Uke 41: Analysens fundamentalteorem II

10. oktober 2024

Denne uken møter vi på to nye "størrelser"/derivasjonsoperatorer

Sirkulasjon / Rotasjon / Curl : $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$ for $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Divergens : $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$ ~~for~~ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

Vi skal bruke disse til å formulere en versjon av analysens fundamentalteorem.

Så først: hva er analysens fundamentalteorem fra vgs?

$$\Rightarrow \int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a) \qquad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Tolkning: å summere de deriverte (som kan være både positive og negative, aka ting kanselleres) er det samme som å se på netto endring i funksjonsverdi.

↳ Skal gjøre noe tilsvarende for curl og divergens.

Notasjon: curl og divergens kan uttrykkes ved nabla-operatoren $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}\right)$ ← brukes som regel om romlige koordinater og ikke tid.

merk: ikke en vektor siden den ikke lever i et vektorrom

Vi skriver (for $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f = (f_1, f_2, f_3)^T$)

sirkulasjon: $\nabla \times f = \text{curl} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\right)$ ← vektor! (men i 2D blir det kun siste komp)

divergens: $\nabla \cdot f = \text{div} f = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \frac{\partial f_3}{\partial x_3}$ ← skalar

Denne uka er vi i 2D, så vi ser på $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, som gir

sirkulasjon: $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}$

divergens: $\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}$

⇝ Analysens fundamentalteorem II aka Greens teorem

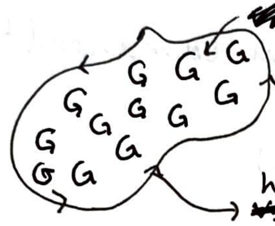
Greens teorem:

$$\underbrace{\iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2}\, dA}_{\text{sirkulasjon}} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} f^T T\, ds}_{\text{arbeid langs } \partial\Omega}$$

Tolkning: summen av sirkulasjonen over hele arealet Ω er det samme som arbeidet langs $\partial\Omega$.

Visuelt:

masse små snurre-piler



~~høyre~~ venstre side av integralet er summen av alle små G

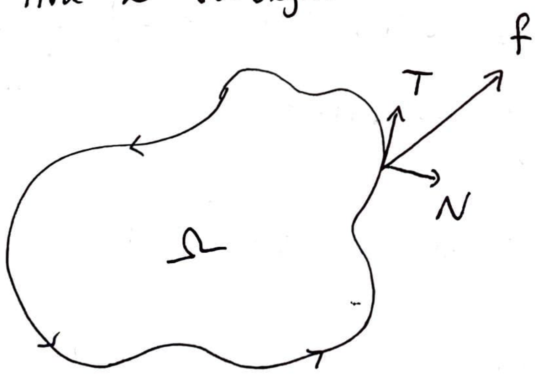
~~venstre~~ høyre siden av integralet er arbeidet langs $\partial\Omega$

Greens teorem, for divergens: (også kalt divergensteoremet i planet)

$$\underbrace{\iint_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2}\, dA}_{\text{divergens}} = \underbrace{\oint_{\partial\Omega} f^T N\, ds}_{\text{fluks ut av } \partial\Omega}$$

Tolkning: summen av divergensen over hele arealet Ω er det samme som fluksen ut av $\partial\Omega$.

Hva er forskjellen?

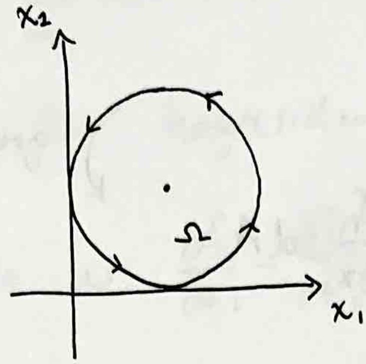


fluks er "hvor mye f langs N"

arbeid er "hvor mye f langs T"

1) Vannstrøm gitt ved vektorfeltet $f(x) = (x_2, 0)^T$.

Ser på området



$$\text{arbeid} = \oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds \quad \text{hvor} \quad T = \frac{\dot{x}(t)}{|\dot{x}(t)|}$$ hvor $x(t)$ er en parametrisering av $\partial\Omega$

Parametrisering av $\partial\Omega$

$$x(t) = (\cos t + 1, \sin t + 1)^T \quad \text{for } 0 \le t \le 2\pi$$

Det gir

$$\dot{x}(t) = (-\sin t, \cos t)^T$$

Så vi får

$$\text{arbeid} = \oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds$$

$$= \int_0^{2\pi} f(x(t))^T \underbrace{\dot{x}(t) \cdot \frac{1}{|\dot{x}(t)|}}_{T} \cdot |\dot{x}(t)| \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t + 1, 0) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} -\sin^2 t - \sin t \, dt = \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t - 1}{2} - \sin t \, dt$$

$\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$$= \left[\frac{1}{4}\sin 2t - \frac{t}{2} + \cos t\right]_0^{2\pi} = 0 - \pi + 1 - 1 = \underline{\underline{-\pi}}$$

Så med Greens:

$$\text{arbeid} = \oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds$$

greens

$$= \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \, dA$$

$$= \iint_{\Omega} 0 - 1 \, dA$$

$$= - \iint_{\Omega} dA$$

$$= -\text{areal}(\Omega)$$

$$= - \pi \cdot 1^2$$

$$= \underline{\underline{-\pi}}$$

$\Rightarrow$ samme svar.

2) Greens: $\oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \, dA$

Dersom $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$ blir høyresiden $\iint_{\Omega} dA = \text{areal}(\Omega)$

La $f = (0, x_1)^T$, da er $\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1 - 0 = 1$

Da gir Greens

$$\text{areal}(\Omega) = \iint_{\Omega} dA = \oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds = \int_a^b f(x(t))^T \dot{x}(t) \, dt$$

Merk: man kan konstruere andre vektorfelt med sirkulasjon lik 1, men da ser ikke resultatet nødvendigvis likt ut. Her konstruerer vi et felt med tanke på hva vi ønsker å oppnå

$$= \int_a^b (0, x_1(t)) \cdot (\dot{x}_1(t), \dot{x}_2(t)) \, dt$$

$$= \int_a^b x_1(t) \dot{x}_2(t) \, dt$$

Asteroide: $x(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)^T$ for $t \in [0, 2\pi]$

$\hookrightarrow$ $x_1(t) = \cos^3 t \quad \dot{x}_2(t) = 3\sin^2 t \cdot \cos t$

$$\text{areal} = \int_0^{2\pi} \cos^3 t \cdot 3 \sin^2 t \cos t \, dt = 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t \sin^2 t \, dt$$

$$= 3 \int_0^{2\pi} \cos^4 t - \cos^6 t \, dt = 3 \int_0^{2\pi} \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^4 - \left(\frac{e^{it} + e^{-it}}{2}\right)^6 dt$$

$$= \frac{3}{2^4} \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^4 \, dt - \frac{3}{2^6} \int_0^{2\pi} (e^{it} + e^{-it})^6 \, dt$$

Pascal's trekant

$$= \frac{3}{2^4} \int_0^{2\pi} e^{4it} + 4e^{2it} + 6e^{0} + 4e^{-2it} + e^{-4it} \, dt - \frac{3}{2^6} \int_0^{2\pi} e^{6it} + 6e^{4it} + 15e^{2it} + 20e^{0} + 15e^{-2it} + 6e^{-4it} + e^{-6t} \, dt$$

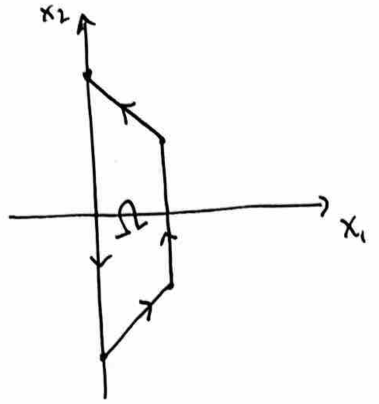
$\int_0^{2\pi} e^{int} \, dt = 0$ for $n \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{3}{2^4} \int_0^{2\pi} 6 \, dt - \frac{3}{2^6} \int_0^{2\pi} 20 \, dt$$

$$= \frac{3}{2^4} \cdot 6 \cdot 2\pi - \frac{3}{2^6} \cdot 20 \cdot 2\pi = \underline{\underline{\frac{3\pi}{8}}}$$

3) $f(x) = (x_1 \sin(x_2^2) - x_2^2,\ x_1^2 x_2 \cos(x_1^2) + 3x_1)^T$

Tegne Ω



Skal beregne $\oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds$

$\rightsquigarrow$ Bruke Greens: $\oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \, dA$

Sirkulasjonen blir

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 2x_1x_2\cos(x_1^2) + 3 - (2x_1x_2\cos(x_2^2) \mp 2x_2)$$

$$= 3 + 2x_2 \quad \leftarrow \text{mye penere enn } f(x)$$

Så: beskrive Ω

x_2 ligger mellom linjene fra $(0,-2)$ til $(1,-1)$ og $(1,1)$ til $(0,2)$

Så $x_1 - 2 \leq x_2 \leq -x_1 + 2$, mens $0 \leq x_1 \leq 1$

Vi får

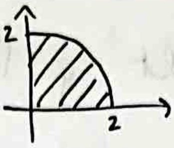
$$\oint_{\partial\Omega} f^T T \, ds = \iint_{\Omega} \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \, dA$$

$$= \int_0^1 \int_{x_1-2}^{-x_1+2} 3 + 2x_2 \, dx_2 dx_1 = \int_0^1 \left[3x_2 + x_2^2\right]_{x_1-2}^{-x_1+2} dx_1$$

$$= \int_0^1 3(-x_1+2) + (-x_1+2)^2 - 3(x_1-2) \mp (x_1-2)^2 \, dx_1$$

$$= \int_0^1 -3x_1 + 6 + \cancel{x_1^2} - \cancel{4x_1} + \cancel{4} - 3x_1 + 6 - \cancel{x_1^2} + \cancel{4x_1} - \cancel{4} \, dx_1 = \int_0^1 -6x_1 + 12 \, dx_1$$

$$= \left[-3x_1^2 + 12x_1\right]_0^1 = \underline{\underline{9}}$$

4) $f(x) = \left(\frac{5}{2} x_2^2 x_1^2 , 3\right)^T$ $\quad \Omega$ er 

$$\text{fluks} = \oint_{\partial\Omega} f^T N \, ds$$

greens / divergensteoremet i planet

$$= \iint_\Omega \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \, dA$$

$$= \iint_\Omega 5 x_2^2 x_1 + 0 \, dA$$

→ polarkoordinater
la $x_1 = r\cos\theta$, $x_2 = r\sin\theta$

jacobideterminant

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^2 5 (r\sin\theta)^2 \cdot (r\cos\theta) \cdot r \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \int_0^2 5 r^4 \, dr \, d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} \sin^2\theta \cos\theta \cdot 2^5 \, d\theta$$

La $u = \sin\theta$, $\frac{du}{d\theta} = \cos\theta$
$u(0) = 0$, $u(\pi/2) = 1$

$$= 2^5 \int_0^1 u^2 \, du = 2^5 \cdot \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1$$

$$= 2^5 \cdot \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{32}{3}}}$$

5) Skalarfelt : $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (antar i planet, altså $n=2$)

$$\Rightarrow \quad \nabla\varphi = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$$

Divergensen av $\nabla\varphi$ er

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}$$

Divergensfritt $\Rightarrow$ divergensen er 0

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2} = 0$$

$\leftarrow$ funksjoner φ som oppfyller dette kaller vi <u>harmoniske</u>

Altså:

Funksjoner φ hvor divergensen av $\nabla\varphi$ er 0 er de samme funksjonene φ som løser Laplace's ligning ($\Delta\varphi = 0$).

Her kommer det frem hvorfor noen bruker ∇^2 som notasjon for laplace-operatoren, siden

$$\underbrace{\nabla\cdot(\nabla\varphi)}_{\text{divergensen til } \nabla\varphi} = \underbrace{\nabla^2\varphi = \Delta\varphi}_{\text{notasjon for operatoren } \Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2^2}}$$

6) Et konservativt vektorfelt $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ oppfyller at $f = \nabla\varphi$ for en skalarfunksjon $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

$$\Rightarrow f = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)$$

Sirkulasjonen av dette er

$$\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_2 \partial x_1} = 0$$

Sirkulasjonsfritt $\Leftrightarrow$ sirkulasjonen er 0

Kunne skrevet dette som $\underbrace{\nabla\times}_{\text{curl-operator}}(\nabla\varphi) = 0$