Koordinattransformasjoner

Oppgave 1

Finn bildet av enhetskvadratet under lineæravbildningen $g(x) = Ax$ når A er

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 2

Beskriv området mellom $x_1^2 + x_2^2 = 1$ og $x_1^2 + x_2^2 = 9$ i første kvadrant med polarkoordinater.

Oppgave 3

Laplaceoperatoren er

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

i polarkoordinater. Finn alle løsninger av laplaces likning som ikke avhenger av θ.

Oppgave 4

La Ω være området i planet avgrenset av linjene

$$x_1 = x_2, \quad x_1 = -x_2, \quad x_2 = 1, \quad x_2 = 2.$$

Bruk polarkoordinater til å regne ut dobbeltintegralet

$$\iint_\Omega (x_1^2 + x_2^2)^{-\frac{3}{2}} \,\mathrm{d}A.$$

Oppgave 5

Du går på en skitur på en øy gitt ved $h(x) = 1 - x_1^2 - x_1 x_2 - x_2^2$ der $h(x) = 0$ er havnivået. Hva slags kurver er ekvidistanselinjene? Finn øyas totale volum.

Oppgave 6

Finn volumet under $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$ når integrasjonsområdet Ω er området mellom parablene

$$x_2 = x_1^2, \quad x_2 = 2x_1^2, \quad x_1 = x_2^2 \quad \text{og} \quad x_1 = 2x_2^2.$$

Oppgave 7

La Ω være området i første kvadrant av planet som er avgrenset av hyperblene

$$x_1^2 - x_2^2 = 1, \quad x_1^2 - x_2^2 = 2, \quad x_1 x_2 = 3, \quad x_1 x_2 = 4.$$

Regn ut integralet

$$\iint_\Omega (x_1^4 - x_2^4)\,\mathrm{d}A.$$

(Her sto det feil da jeg gjorde oppgaven i forelesning, det sto $x_1^2 - x_2^2$.)