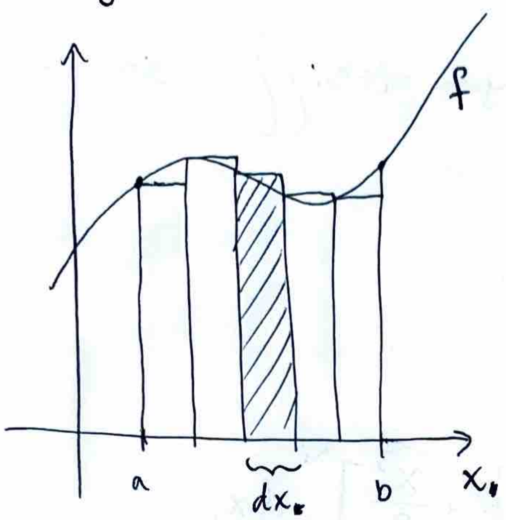
Uke 39: Dobbeltintegraler

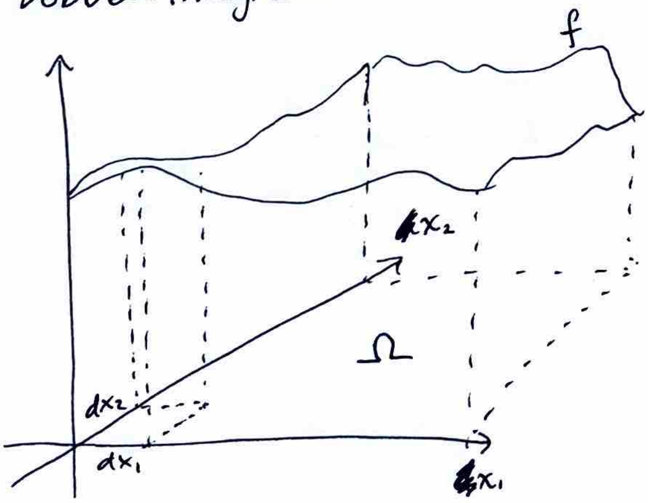
Fra vgs:



$\int_a^b f(x)\,dx$ er arealet under grafen til f, avgrenset av x-aksen, $x=a$ og $x=b$.

⇝ Viktigst: vi summerer arealer av rektangler med bredde dx og høyde $f(x)$.

Dobbeltintegraler:



$$\iint_\Omega f\,dA = \int_a^b \int_c^d f(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

er volumet under grafen til f, avgrenset av x_1x_2-planet, $x_1=c$, $x_1=d$, $x_2=b$, $x_2=a$.

⇝ Viktigst: vi summerer volum av prismer med grunnflate $dx_1 \cdot dx_2$ og høyde $f(x_1, x_2)$.

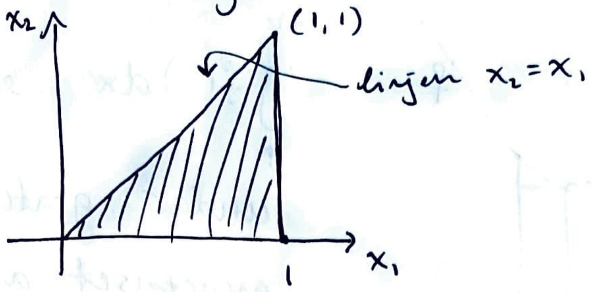
Merk: vi har ofte mer kompliserte områder å integrere over enn et rektangel. "Trikset" når det kommer til å løse dobbeltintegraler, er som regel å forstå integrasjonsområdet Ω

Alltid tegn integrasjonsområdet Ω når du løser dobbeltintegraler!!!

1) La oss starte med å skissere integrasjonsområdet.

Vi har $0 \leq x_1 \leq 1$ og $0 \leq x_2 \leq x_1$.

Det gir



Det itererte integralet blir

$$\int_0^1\int_0^{x_1} x_1 x_2 + x_2^2 \, dx_2 dx_1 = \int_0^1 \left[x_1 \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_2^3}{3}\right]_0^{x_1} dx_1$$

$$= \int_0^1 x_1 \cdot \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_1^3}{3} - 0 \, dx_1$$

$$= \int_0^1 \frac{5x_1^3}{6} dx_1$$

$$= \frac{5}{6}\left[\frac{x_1^4}{4}\right]_0^1$$

$$= \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{4}$$

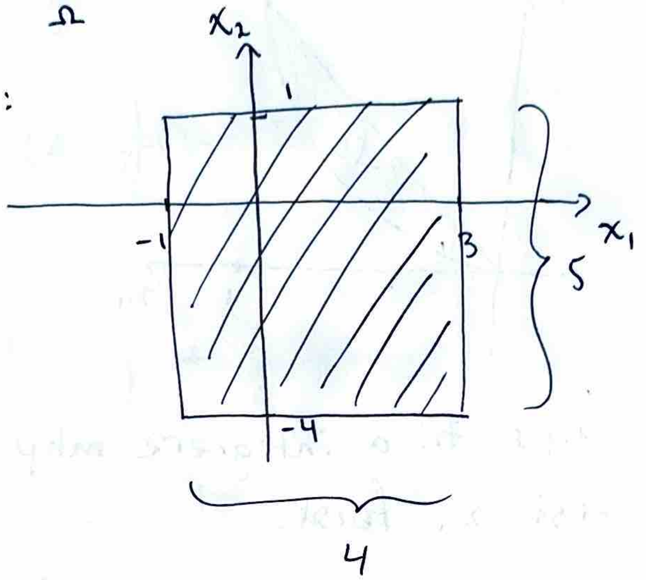
$$= \underline{\underline{\frac{5}{24}}}$$

2) Husk: $\int_a^b dx = b-a$ aka lengden av linjen fra a til b

Tilsvarende: $\iint_\Omega dA$ er bare <u>arealet</u> av området Ω.

(Kan tenke på det som å integrere funksjonen $f(x_1,x_2)=1$)

Tegner Ω:



Så vi får

$$\iint_\Omega dA = \text{arealet av } \Omega$$

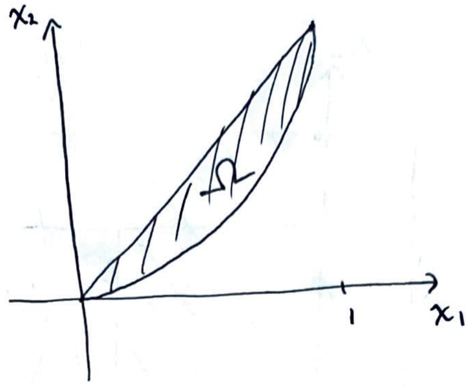
= arealet av rektangel med grunnlinje 4, høyde 5

$= 4 \cdot 5$

$= \underline{\underline{20}}$

3) Skal beregne $\iint\limits_{\Omega} \frac{x_1}{x_2} e^{x_2}\, dA$

på området $0 \le x_1 \le 1,\ x_1^2 \le x_2 \le x_1$



Tenk: har vi lyst til å integrere mhp x_1 eller x_2 først? $\rightsquigarrow$ helst x_1 først.

Vi kan også beskrive Ω som området hvor

$0 \le x_2 \le 1,\ x_2 \le x_1 \le \sqrt{x_2}$

Så vi får

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{x_1}{x_2} e^{x_2}\, dA = \int_0^1 \int_{x_2}^{\sqrt{x_2}} \frac{x_1}{x_2} e^{x_2}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{x_2}}{x_2} \left[\frac{x_1^2}{2}\right]_{x_2}^{\sqrt{x_2}} dx_2$$

$$= \int_0^1 \frac{e^{x_2}}{x_2} \left(\frac{x_2}{2} - \frac{x_2^2}{2}\right) dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 e^{x_2} - x_2 e^{x_2}\, dx_2$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (1-x_2) e^{x_2}\, dx_2$$

$\rightsquigarrow$ delvis integrasjon

$$u' = e^{x_2} \quad v = 1 - x_2 \quad \Rightarrow \quad u = e^{x_2} \quad v' = -1$$

$$\int (1-x_2) e^{x_2} dx_2 = (1-x_2) e^{x_2} + \int e^{x_2} dx_2$$

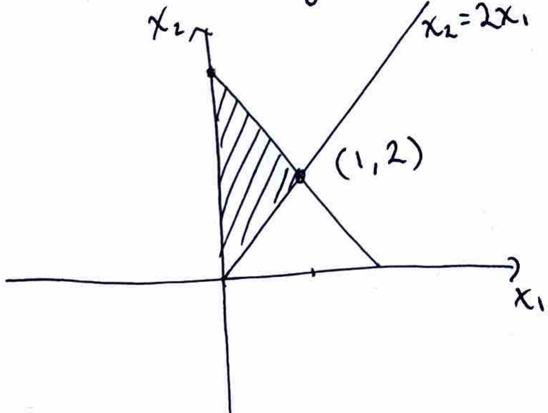
$$\Rightarrow \iint_\Omega \frac{x_1}{x_2} e^{x_2} dA = \frac{1}{2}\Big[(1-x_2) e^{x_2}\Big]_0^1 + \frac{1}{2}\Big[e^{x_2}\Big]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2}(e-1)$$

$$= \frac{e}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{e-2}{2}}}$$

4) Legemet ligger mellom $x_3 = 0$ og $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$.

$\rightsquigarrow$ Finne integrasjonsområdet, i x_1x_2-planet.



planet $4x_1 + 2x_2 + x_3 = 8$ i x_1x_2-planet, er linjen $x_2 = 4 - 2x_1$

$\rightsquigarrow$ Kan beskrive området ved $0 \le x_1 \le 1$, $2x_1 \le x_2 \le 4 - 2x_1$

"Høyden" av legemet er $x_3 = 8 - 4x_1 - 2x_2$

$$\Rightarrow \text{volum} = \int_0^1 \int_{2x_1}^{4-2x_1} 8 - 4x_1 - 2x_2 \, dx_2 dx_1 = \int_0^1 \Big[8x_2 - 4x_1x_2 - x_2^2\Big]_{2x_1}^{4-2x_1} dx_1$$

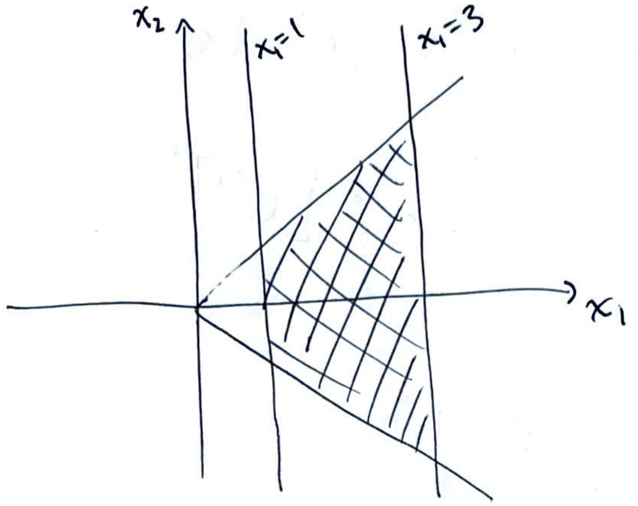
$$= \int_0^1 8(4-2x_1) - 4x_1(4-2x_1) - (4-2x_1)^2 - 8 \cdot 2x_1 + 4x_1 2x_1 + 4x_1^2 \, dx_1$$

$$= \int_0^1 32 - 16x_1 - 16x_1 + 8x_1^2 - 16 + \cancel{16x_1} - \cancel{4x_1^2} - \cancel{16x_1} + 8x_1^2 + \cancel{4x_1^2} \, dx_1$$

$$= \int_0^1 16 - 32x_1 + 16x_1^2 \, dx_1 = 16 - 16 + \frac{16}{3} = \underline{\underline{\frac{16}{3}}}$$

5) Vi skal beregne $\iint_\Omega f \, dA$ hvor $f(x) = x_1^2 - x_2^2$

og Ω er som oppgitt, la oss tegne Ω i x_1x_2-planet



x_1x_2-planet: $x_3 = 0$

$\Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = x_2, \; x_1 = -x_2$

$$\text{volum} = \iint_\Omega f \, dA$$

$$= \int_1^3 \int_{-x_1}^{x_1} x_1^2 - x_2^2 \, dx_2 \, dx_1$$

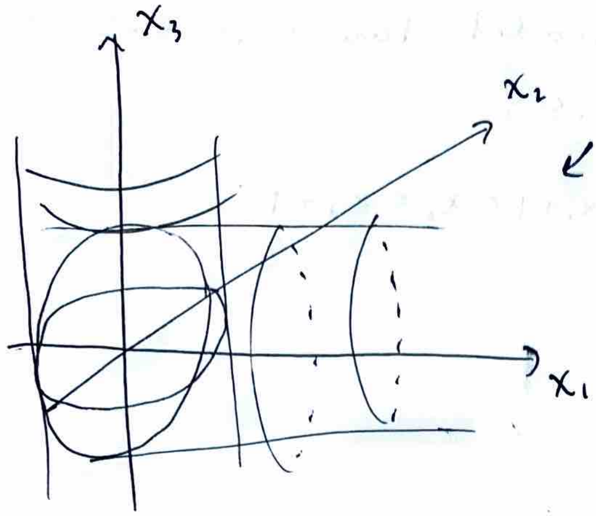
$$= \int_1^3 \left[x_2 x_1^2 - \frac{x_2^3}{3} \right]_{-x_1}^{x_1} dx_1$$

$$= \int_1^3 x_1^3 - \frac{x_1^3}{3} - (-x_1)x_1^2 + \frac{(-x_1)^3}{3} \, dx_1$$

$$= \int_1^3 x_1^3 - \frac{x_1^3}{3} + x_1^3 - \frac{x_1^3}{3} \, dx_1$$

$$= \int_1^3 \frac{4x_1^3}{3} \, dx_1 = \left[\frac{x_1^4}{3} \right]_1^3 = \frac{3^4}{3} - \frac{1}{3} = \frac{3^4 - 1}{3} = \underline{\underline{\frac{80}{3}}}$$

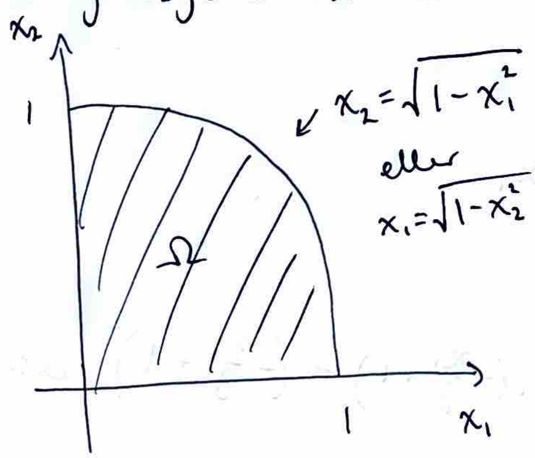
6) Første oktant: $x_1, x_2, x_3 \geq 0$



← uhm ja hehe, her skal det være to sylindre, en langs x_1-aksen og en langs x_3-aksen.

Vi finner at $x_2^2 + x_3^2 = 1$ - sylinderen er "taket", så vi skal integrere funksjonen $x_3 = \sqrt{1 - x_2^2}$

Integrasjonsområdet blir:



$$\iint_\Omega \sqrt{1-x_2^2}\, dA$$

⇝ ønsker å integrere mhp x_1 først, så velger grensene

$0 \leq x_2 \leq 1, \quad 0 \leq x_1 \leq \sqrt{1-x_2^2}$

$$\text{volum} = \iint_\Omega \sqrt{1-x_2^2}\, dA$$

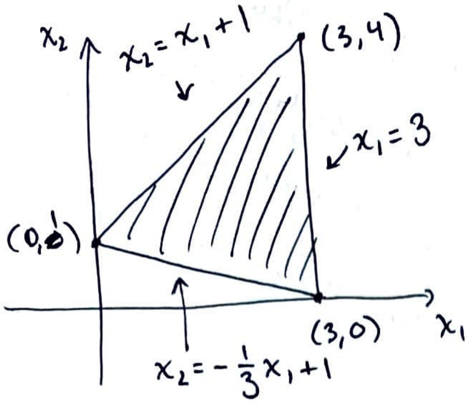
$$= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x_2^2}} \sqrt{1-x_2^2}\, dx_1\, dx_2$$

$$= \int_0^1 \left[\sqrt{1-x_2^2} \cdot x_1\right]_0^{\sqrt{1-x_2^2}} dx_2$$

$$= \int_0^1 1 - x_2^2\, dx_2$$

$$= \left[x_2 - \frac{x_2^3}{3}\right]_0^1 = 1 - \frac{1}{3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}$$

7) La oss starte med å skissere Ω.



Så området kan beskrives ved

$0 \leq x_1 \leq 3,$

$-\frac{1}{3}x_1 + 1 \leq x_2 \leq x_1 + 1$

Så vi får

$$\text{volum} = \iint_{\Omega} f \, dA$$

$$= \int_0^3 \int_{-\frac{x_1}{3}+1}^{x_1+1} x_1 + 2x_2 \, dx_2 \, dx_1$$

$$= \int_0^3 \left[x_1 x_2 + x_2^2 \right]_{-\frac{x_1}{3}+1}^{x_1+1} dx_1$$

$$= \int_0^3 x_1(x_1+1) + (x_1+1)^2 - x_1\left(-\frac{x_1}{3}+1\right) - \left(-\frac{x_1}{3}+1\right)^2 dx_1$$

$$= \int_0^3 x_1^2 + \cancel{x_1} + x_1^2 + 2x_1 + \cancel{1} + \frac{x_1^2}{3} - \cancel{x_1} - \frac{x_1^2}{9} + \frac{2x_1}{3} - \cancel{1} \, dx_1$$

$$= \int_0^3 \frac{20}{9}x_1^2 + \frac{8}{3}x_1 \, dx_1$$

$$= \left[\frac{20}{9} \cdot \frac{x_1^3}{3} + \frac{8}{3} \cdot \frac{x_1^2}{2} \right]_0^3$$

$$= \frac{20}{\cancel{9}} \cdot \frac{\cancel{3^3}}{\cancel{3}} + \frac{8}{\cancel{3}} \cdot \frac{\cancel{3^2}}{2} = 20 + 12 = \underline{\underline{32}}$$