18. september 2024

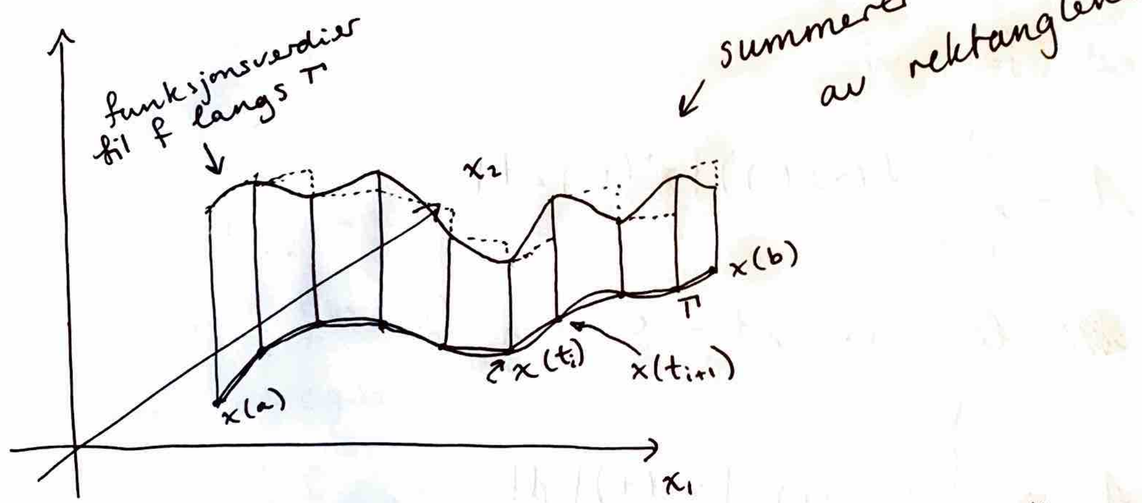
Linjeintegraler

Tenk "vanlig" integral fra vgs, i.e. $\int_a^b f(x)\,dx$, men istedenfor å integrere langs x-aksen, integrerer vi langs en kurve Γ.

Denne uken ser vi på både linjeintegral ~~...~~ av skalarfelt og vektorfelt.

1) Skal "vise" at linjeintegralet til f over Γ er gitt ved

$$\int_\Gamma f\,ds = \int_a^b f(x(t))\,|x'(t)|\,dt$$



⇝ Estimerer arealet ved å dele opp ~~...~~ intervallet $[a,b]$ i n punkter med avstand $\Delta t = \frac{b-a}{n}$

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i))\,\Delta s_i$$

hvor Δs_i er grunnlinjen i de små rektanglene, altså ~~...~~ avstanden mellom $x(t_{i+1})$ og $x(t_i)$

⟶

Så:

$$\Delta s_i = |x(t_{i+1}) - x(t_i)| \approx |x'(t_i)\Delta t|$$

↑ sekantsetningen

Sekantsetningen: anta f deriverbar på (a,b). Da fins en $c \in (a,b)$ slik at

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Her er det likhet, men vi "tilnærmer", så derfor $\approx$, at $c \approx t_i$, siden små intervaller.

Dermed får vi

$$A = \sum_{i=1}^{n} f(x(t_i))\,|x'(t_i)\Delta t|$$

Så lar vi $\Delta t \to 0$, og får

$$\lim_{\Delta t \to 0} A = \int_a^b f(x(t))\,|x'(t)|\,dt$$

2) Vi starter med å finne en parametrisering av $\mathcal{C}$, som er skjæringen mellom

$$(x_1-1)^2 + (x_2-1)^2 = 1 \quad \text{og} \quad x_3 = x_1^2 + x_2^2$$

sylinder med radius 1 og sentrum $(1,1)^T$

paraboloide

Starter med likningen med færrest ukjente, la $x_1 = \cos t + 1$, $x_2 = \sin t + 1$ for $t \in [0, 2\pi]$.

Da blir

$$x_3 = (\cos t + 1)^2 + (\sin t + 1)^2$$
$$= \cos^2 t + 2\cos t + 1 + \sin^2 t + 2\sin t + 1$$
$$= 2\cos t + 2\sin t + 3$$

Så vi får parametriseringen

$$x(t) = (\cos t + 1, \sin t + 1, 2\cos t + 2\sin t + 3)^T$$

Vi skal beregne linjeintegralet

$$\int_{\mathcal{C}} f \, ds = \int_a^b f(x(t)) \, |x'(t)| \, dt$$

Beregner $x'(t)$

$$x'(t) = (-\sin t, \cos t, -2\sin t + 2\cos t)^T$$

$$\Rightarrow |x'(t)| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + (2\cos t - 2\sin t)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 4\cos^2 t - 8\cos t \sin t + 4\sin^2 t}$$
$$= \sqrt{5 - 8\cos t \sin t}$$

Så: beregner $\rho(x(t))$

$$\rho(x(t)) = \sqrt{12(\cos t+1)+12(\sin t+1)-(2\cos t+2\sin t+3)^2} - 6$$

$$= \sqrt{12\cancel{\cos t}+12+12\cancel{\sin t}+12-(4\cos^2 t+4\sin^2 t+9 + 12\cancel{\cos t}+12\cancel{\sin t}+8\cos t\sin t)-6}$$

$$= \sqrt{5-8\cos t\sin t}$$

Integralet blir dermed

$$\text{antall plankton} = \int_0^{2\pi} \rho(x(t))\,|x'(t)|\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{5-8\cos t\sin t}\cdot\sqrt{5-8\cos t\sin t}\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 5-8\cos t\sin t\,dt$$

$$= \int_0^{2\pi} 5-4\sin 2t\,dt$$

$$= \Big[5t+2\cos 2t\Big]_0^{2\pi}$$

$$= 10\pi+2-0-2$$

$$= \underline{\underline{10\pi}}$$

3) La T være kurven gitt ved $x(t)$.

Vi ønsker å beregne

$$\int_T \rho \, ds = \int_0^1 \rho(x(t))\,|x'(t)|\,dt$$

hvor ρ er plankton tettheten.

Merk: i mange oppgaver får man oppgitt $\rho(x)$ og så skal man selv putte inn $x(t)$ inn i ρ, mens her har vi fått oppgitt $\rho(x(t))$

Beregner $x'(t)$:

$$x'(t) = (3,\, 6t,\, 6t^2)^T$$

$$\Rightarrow \ |x'(t)| = \sqrt{9 + 36t^2 + 36t^4} = 3\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}$$

$$= 3\sqrt{(1+2t^2)^2} = 3(1+2t^2)$$

$$\Rightarrow \int_T \rho \, ds = \int_0^1 \rho(x(t))\,|x'(t)|\,dt = \int_0^1 (1+t)\cdot 3(1+2t^2)\,dt$$

$$= 3\int_0^1 1 + 2t^2 + t + 2t^3 \,dt = 3\left[t + \frac{2}{3}t^3 + \frac{t^2}{2} + \frac{t^4}{2}\right]_0^1$$

$$= 3\left(1 + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\underline{8}}$$

4) Netto kraft F på en partikkel (aka summen av krefter)

$\leadsto$ N2 gir $F = m\ddot{x}$

Partikkelens kinetiske energi er gitt ved

$$E(t) = \frac{1}{2} m |\dot{x}(t)|^2 = \frac{1}{2} m \dot{x}(t)^T \dot{x}(t)$$

Den deriverte av energien er gitt ved

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \frac{d}{dt}\left(\dot{x}(t)^T \dot{x}(t)\right)$$

produktregelen for derivasjon

$$= \frac{1}{2} m \left(\ddot{x}(t)^T \dot{x}(t) + \dot{x}(t)^T \ddot{x}(t)\right)$$

$$= \frac{1}{2} m \cdot 2 \ddot{x}(t)^T \dot{x}(t)$$

$$= m \ddot{x}(t)^T \dot{x}(t)$$

Integralet blir dermed

$$\int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t)\, dt = \int_a^b m \ddot{x}(t)^T \dot{x}(t)\, dt$$

$$= \int_a^b \frac{dE(t)}{dt}\, dt \underset{\text{AFT}}{=} E(b) - E(a)$$

Konservative vektorfelt & linjeintegraler

For konservative vektorfelt gjelder:

1. Gitt to kurver Γ_1, Γ_2 fra a til b, vil

$$\int_{\Gamma_1} f \cdot ds = \int_{\Gamma_2} f \cdot ds$$

2. For en lukket kurve Γ, har vi

$$\oint f \cdot ds = 0$$

3. φ ~~skalar~~ potensial funksjonen til f, da er

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds = \varphi(b) - \varphi(a)$$

~ Veiuavhengig ~

5) Vi har et (stygt) konservativt vektorfelt f, og skal beregne $\int_\Gamma f \cdot ds$ hvor Γ er gitt ved parametriseringen $x(t) = (t^2, \sin 2\pi t, t)^T$, $-1 \leq t \leq 1$.

Konservativt $\Leftrightarrow$ veiuavhengig!

$\rightsquigarrow$ La oss finne en annen vei fra start til slutt

Startpunkt: $x(-1) = (1, 0, -1)^T$

Sluttpunkt: $x(1) = (1, 0, 1)^T$

Istedenfor å integrere langs Γ, la oss integrere ~~rundt~~ langs Γ' gitt ved $r(t) = (1, 0, t)^T$ hvor $-1 \leq t \leq 1$.

↳ altså den rette linjen mellom start og slutt.

Vi har at

$$\int_{T'} f\cdot ds = \int_{-1}^{1} f(r(t))^T r'(t)\, dt$$

Beregner $r'(t)$

$$r'(t) = (0, 0, 1)^T$$

Merk! Dette er en fin vektor å ta skalarprodukt med, vi trenger kun 3. komponenten til $f(r(t))$

Og $f(r(t))$ (trenger egt kun →

$$f(r(t)) = f((1, 0, t)^T)$$

$$= \left(\frac{2}{2+t^2} + 0,\ t^2,\ \frac{2t}{2+t^2} + 0\right)^T$$

Så vi får

$$\int_{T} f\cdot ds = \int_{T'} f\cdot ds = \int_{-1}^{1} f(r(t))^T r'(t)\, dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(\frac{2}{2+2t^2},\ t^2,\ \frac{2t}{2+t^2}\right) (0, 0, 1)^T\, dt$$

$$u = 2 + t^2 \rightsquigarrow \frac{du}{dt} = 2t$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{2t}{2+t^2}\, dt$$

$$= \left(= \int \frac{1}{u}\, du\right) = \Big[\ln|2+t^2|\Big]_{-1}^{1} = \ln 3 - \ln 3 = \underline{\underline{0}}$$

~~4~~) 6 Vis at vektorfeltet $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gitt ved

$$f(x) = \left(x_1 + x_2 + 4x_1^3 x_2^3,\ x_2^3 + x_1 + 3x_1^4 x_2^2\right)^T$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds$$

der $\mathcal{C}$ er kurven gitt ved

$$x(t) = (2e^t \cos t,\ 2e^t \sin t) \qquad t \in [0, 2\pi]$$

f konservativt: det fins $\varphi: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ slik at

$$f = \nabla\varphi = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_1}, \frac{\partial \varphi}{\partial x_2}\right)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_1} = x_1 + x_2 + 4x_1^3 x_2^3 & \Rightarrow \varphi = \dfrac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + x_1^4 x_2^3 + c_1(x_2) \\[2ex] \dfrac{\partial \varphi}{\partial x_2} = x_2^3 + x_1 + 3x_1^4 x_2^2 & \Rightarrow \varphi = \dfrac{x_2^4}{4} + x_1 x_2 + x_1^4 x_2^3 + c_2(x_1) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{x_1^2}{2} + x_1 x_2 + x_1^4 x_2^3 + \frac{x_2^4}{4}$$

$$\int_C f \cdot ds = \varphi(b) - \varphi(a)$$

startpunkt: $x(0) = (2, 0)^T$, sluttpunkt: $x(2\pi) = (2e^{2\pi}, 0)^T$

$$\int_{\mathcal{C}} f \cdot ds = \cancel{\varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}2e^{2\pi}\\0\end{pmatrix} = 2 - \frac{(2e^{2\pi})^2}{2} = 2 - 2e^{4\pi}}$$

$$= \varphi\begin{pmatrix}2e^{2\pi}\\0\end{pmatrix} - \varphi\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{(2e^{2\pi})^2}{2} - 2 = \underline{\underline{2e^{4\pi} - 2}}$$