

Linjeintegraler

Oppgave 1

Bruk din forståelse av riemannsummer til å forklare at linjeintegralet til f over Γ er gitt ved

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_a^b f(x(t)) |x'(t)| \, dt$$

hvor Γ er parametrisert ved $x : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$.

Oppgave 2

En brugde svømmer langs kurven \mathcal{C} der \mathcal{C} er skjæringskurven mellom flatene

$$(x_1 - 1)^2 + (x_2 - 1)^2 = 1 \quad \text{og} \quad x_3 = x_1^2 + x_2^2.$$

Hvor mye plankton spiser brugden dersom planktontettheten er gitt ved $\rho(x) = \sqrt{12x_1 + 12x_2 - x_3^2 - 6}$?

Oppgave 3

Hvor mye plankton spiser en brugde som svømmer langs kurven $x(t) = (3t, 3t^2, 2t^3)^T$ for $0 \leq t \leq 1$, dersom planktontettheten i $x(t)$ er $1 + t$?

Oppgave 4

Anta at F er netto kraft på en partikkel, slik at Newtons andre lov $F = m\ddot{x}$ gir oss partikkelens trajektorie x . Partikkelens kinetiske energi er gitt ved $E(t) = \frac{1}{2}m|\dot{x}(t)|^2$. Vis at

$$E(b) - E(a) = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t) \, dt$$

Oppgave 5

Vektorfeltet $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$f(x) = \left(\frac{2x_1}{1 + x_1^2 + x_3^2} + x_2x_3^2e^{x_1x_2x_3^2}, x_1x_3^2e^{x_1x_2x_3^2}, \frac{2x_3}{1 + x_1^2 + x_3^2} + 2x_1x_2x_3e^{x_1x_2x_3^2} \right)^T$$

er konservativt. Regn ut

$$\int_{\Gamma} f \cdot ds$$

der Γ er kurven gitt ved $x(t) = (t^2, \sin(2\pi t), t)^T$ hvor $-1 \leq t \leq 1$.