Optimering I

Oppgave 1: Klassifisering av kritiske punkter

Forklar hvorfor vi trenger å vite om hessematrisen er positivt eller negativt definitt eller ingen av delene for å avgjøre om et kritisk punkt er et toppunkt, bunnpunkt eller sadelpunkt.

Oppgave 2

La $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være gitt ved

$$f(x) = x_1^4 + x_2^2 + 4x_1 + 3x_2 - 4$$

Finn alle kritiske punkter, og bruk hessematrisen til å avgjøre om det er toppunkt, bunnpunkt eller sadelpunkt.

Oppgave 3

La $f : \Omega \to \mathbb{R}$ være gitt ved $f(x) = 2x_1x_2$, hvor Ω er området i planet gitt ved $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$. Finn den største verdien av f på området Ω

a) ved å parametrisere randen $\partial\Omega$.

b) ved å bruke Lagrange multiplikatorer.

Klassifisering av kritiske punkter

Fremgangsmåte for å forklare hvorfor vi bryr oss om egenverdiene til hessematrisen, når vi skal klassifisere et kritisk punkt. Vi ser på en funksjon $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, og antar at hessematrisen er symmetrisk.

1. Parametrisere en vilkårlig rett linje gjennom et kritisk punkt a, og se på funksjonsverdier langs denne linjen.
   - La $g(t) = f(a + tv)$ for $t \in \mathbb{R}$, $v \in \mathbb{R}^2$.
2. Taylorutvikle $g(t) = f(a + tv)$ om $t = 0$.
   - Bruke at $g''(t) = v^T f''(a + tv)v$ hvor f'' er hessematrisen til f.
3. Sjekke om hessematrisen er positivt eller negativt definitt.
   - Vise at en symmetrisk matrise er positivt definitt hvis og bare hvis alle egenverdiene er positive.

Konklusjon: For å sjekke om et punkt a er et toppunkt, bunnpunkt eller sadelpunkt, må vi se på fortegnet til egenverdiene til hessematrisen.

For å gjøre alt dette, trenger vi blant annet

Kjerneregelen. Hvis f er en funksjon av x_1 og x_2, og x_1 og x_2 er deriverbare funksjoner av t, så er

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial f}{\partial x_2}\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}$$

Definisjon av positiv definitt. En matrise $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ er positivt definitt hvis og bare hvis $v^T Av > 0$ for alle $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$.

Egenskap ved symmetriske matriser. Alle symmetriske matriser er ortogonalt diagonaliserbare, altså det fins en ortonormal egenvektorbasis.