8. september 2024

Mer optimering

Klassifisere kritiske punkter:

- Evaluere hessematrisen i det kritiske punktet og finne egenverdiene
  - Alle positive $\Rightarrow$ bunnpunkt
  - Alle negative $\Rightarrow$ toppunkt
  - Noen negative, noen positive $\Rightarrow$ sadelpunkt
  - Noen 0 $\Rightarrow$ ingen konklusjon

Finne maks/min langs kurve

- Parametrisere
  - Putte parametrisering inn i funksjonsuttrykk (nå får funksjon med kun én variabel, så maksimere/minimere denne som vanlig)
- Lagrange multiplikatorer
  - Løse $\begin{cases} \nabla f = \lambda \nabla g \\ g(x) = 0 \end{cases}$ f er funksjon vi bryr oss om, $g(x)=0$ er en constraint

1) $f(x) = x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_1x_2^2 + x_1$

Kritiske punkter: $\nabla f = 0$

$\nabla f = (2x_1 - 3x_2 + 2x_2^2 + 1, -3x_1 + 4x_1x_2)$

Gradient lik 0 gir likningene

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \end{array} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 2x_2^2 + 1 = 0 \\ -3x_1 + 4x_1x_2 = 0 \end{cases}$$

II gir $x_1(4x_2 - 3) = 0$, så enten $x_1 = 0$ eller $x_2 = \frac{3}{4}$

$x_1 = 0$ i I gir $2x_2^2 - 3x_2 + 1 = 0 \iff x_2^2 - \frac{3}{2}x_2 + \frac{1}{2} = 0$

$\Rightarrow (x_2 - \frac{1}{2})(x_2 - 1) = 0 \Rightarrow (0,1)^T, (0, \frac{1}{2})^T$

$x_2 = \frac{3}{4}$ i I gir

$$2x_1 - 3\cdot\frac{3}{4} + 2\cdot\frac{9}{16} + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = \frac{9}{8} - \frac{9}{16} - \frac{1}{2} = \frac{18-9-8}{16} = \frac{1}{16} \Rightarrow \left(\frac{1}{16}, \frac{3}{4}\right)^T$$

$\Rightarrow$ tre kritiske punkter: $(0,1)^T$, $(0,\frac{1}{2})^T$, $(\frac{1}{16}, \frac{3}{4})^T$

$\rightsquigarrow$ finne hessematrisen til f.

$$f'' = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -3+4x_2 \\ -3+4x_2 & 4x_1 \end{pmatrix}$$

$$f''\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1-\sqrt{2} < 0 \qquad \lambda_2 = 1+\sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow (0,1)^T$ er et sadelpunkt

$$f''\left(\begin{pmatrix}0\\1/2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(2-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2\lambda - 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 1-\sqrt{2} < 0 \qquad \lambda_2 = 1+\sqrt{2} > 0$$

$\Rightarrow (0, \frac{1}{2})^T$ er et sadelpunkt.

$$f''\left(\begin{pmatrix}\frac{1}{16}\\ 3/4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & \frac{1}{4}\end{pmatrix} \Rightarrow \lambda_1 = 2,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}$$

$\Rightarrow$ begge positive, $(\frac{1}{16}, \frac{3}{4})^T$ er bunnpunkt

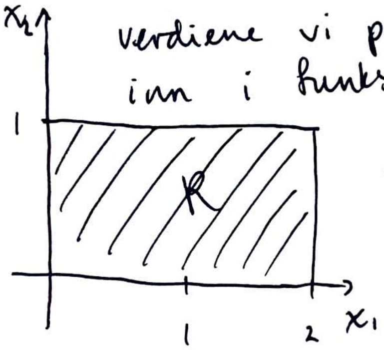
Så: vi fant

- ~~[illegible]~~ $(0,1)^T$ og $(0,\frac{1}{2})^T$ er sadelpunkt
- $(\frac{1}{16}, \frac{3}{4})^T$ er bunn~~[illegible]~~punkt

2) $f(x) = x_1 - x_1^2 + x_2^2$

Skal finne maks/min
1) Finne kritiske punkter (Trenger ikke klassifisere)
2) Sjekke rand

verdiene vi putter inn i funksjonen



mulig-heter ~~punkt~~	maks	min
$(\frac{1}{2},0)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$(0,x_2)$	1	0
$(2,x_2)$	-1	-2
$(x_1,0)$	$\frac{1}{4}$	-2
$(x_1,1)$	$\frac{5}{4}$	-1

Starter med å finne kritiske punkter

$$\nabla f = (1-2x_1,\ 2x_2)$$

$\nabla f = 0$ gir

$$\begin{cases} 1-2x_1 = 0\\ 2x_2 = 0\end{cases} \Rightarrow \text{kun ett kritisk punkt } (\tfrac{1}{2}, 0)$$

Sjekke rand, altså linjene $x_1=0$, $x_1=2$, $x_2=0$, $x_2=1$

$x_1=0$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}0\\x_2\end{pmatrix}\right) = x_2^2$ maks i $x_2=1$, min i $x_2=0$

$x_1=2$ $\quad f\left(\begin{pmatrix}2\\x_2\end{pmatrix}\right) = 2-4+x_2^2 = x_2^2-2$ maks i $x_2=1$, min i $x_2=0$

$\cancel{x_2=0 \quad f\left(\begin{pmatrix}x_1\\0\end{pmatrix}\right) = x_1 - x_1^2}$

$\longrightarrow$

$x_2 = 0 \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = x_1 - x_1^2 = g(x_1)$

$g'(x_1) = 1 - 2x_1 \quad \Rightarrow$ toppunkt i $x_1 = \frac{1}{2}$

minste verdi i $x_1 = 2$

$x_2 = 1 \quad f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = x_1 - x_1^2 + 1 = h(x)$

$h'(x) = 1 - 2x_1 \quad \Rightarrow$ toppunkt i $x_1 = \frac{1}{2}$

minste verdi i $x_1 = 2$

(ser i tabell)

maksimumsverdi: $\frac{5}{4}$

minimumsverdi: -2

3) Bruker lagrangemultiplikatorer:

La $g(x) = x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1$

$\nabla h = (-2x_1 - x_2, -x_1 - 2x_2)$

$\nabla g = (2x_1, \frac{1}{2}x_2)$

Setter $\nabla h = \lambda \nabla g$

$$\begin{cases} -2x_1 - x_2 = \lambda 2x_1 \\ -x_1 - 2x_2 = \lambda \cdot \frac{1}{2} x_2 \\ x_1^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow x_1 = -2x_2 - \frac{\lambda}{2} x_2$$

$-2(-2x_2 - \frac{\lambda}{2}x_2) - x_2 = 2\lambda(-2x_2 - \frac{\lambda}{2}x_2)$

$4x_2 + \lambda x_2 - x_2 = -4\lambda x_2 - \lambda^2 x_2$

$\Rightarrow x_2(\lambda^2 + 5\lambda + 3) = 0$

$\Rightarrow$ enten $x_2 = 0$ eller $\lambda = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

men da blir $x_1 = 0$ og det ligger ikke på $g(x) = 0$

Så $\lambda = \dfrac{-5 \pm \sqrt{13}}{2}$

vi har $x_1 = \left(-2 - \dfrac{\lambda}{2}\right) x_2$

$$\Rightarrow x_1 = \left(-2 - \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{4}\right) x_2 = \left(\frac{-8 + 5 \pm \sqrt{13}}{4}\right) x_2$$

$$= \left(\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}\right) x_2$$

ved å putte dette inn i $g(x) = 0$ får vi

$$\left(\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}\right)^2 x_2^2 + \frac{x_2^2}{4} - 1 = 0$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}\right) x_2^2 = 1$$

$$\Rightarrow x_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{\left(\frac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}\right)^2 + \frac{1}{4}}} = \pm \frac{4}{\sqrt{(-3 \pm \sqrt{13})^2 + 4}}$$

wow, stygge tall:

$$\frac{4}{\sqrt{(-3 + \sqrt{13})^2 + 4}} = \sqrt{\frac{16}{9 - 6\sqrt{13} + 13 + 4}} = \sqrt{\frac{16}{26 - 6\sqrt{13}}}$$

$$= \sqrt{\frac{8}{13 - 3\sqrt{13}}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 13 + 8 \cdot 3\sqrt{13}}{13^2 - 3^2 \cdot 13}} = \sqrt{\frac{8 \cdot 13 + 8 \cdot 3\sqrt{13}}{13(13 - 9)}}$$

$$= \sqrt{\frac{2 \cdot 13 + 6\sqrt{13}}{13}} = \sqrt{2 + \frac{6}{\sqrt{13}}}$$

så $x_2 = \pm \sqrt{2 \pm \dfrac{6}{\sqrt{13}}}$, $x_1 = \left(\dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{4}\right) x_2$

(tok det i python herfra)

4) Lagrange multiplikatorer

$\nabla f = (1, 2)$ La $g(x) = 6(x_1+x_2)^2 + 2(x_1-x_2)^2 - 3$

$\nabla g = (12(x_1+x_2) + 4(x_1-x_2),\ 12(x_1+x_2) - 4(x_1-x_2))$

$= (16x_1 + 8x_2,\ 8x_1 + 16x_2)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\begin{cases} \text{I} & 1 = \lambda(16x_1 + 8x_2) \\ \text{II} & 2 = \lambda(8x_1 + 16x_2) \\ \text{III} & 6(x_1+x_2)^2 + 2(x_1-x_2)^2 - 3 = 0 \end{cases}$$

II gir $8\lambda x_1 = 2 - 16\lambda x_2$ $\rightsquigarrow$ inn i I

$1 = 2 \cdot 8\lambda x_1 + 8\lambda x_2$

$= 2(2 - 16\lambda x_2) + 8\lambda x_2 = 4 - 32\lambda x_2 + 8\lambda x_2$

$\Rightarrow 0 = 3 - 24\lambda x_2 \Rightarrow \lambda x_2 = \frac{1}{8}$

$\to 8\lambda x_1 = 2 - 16 \cdot \frac{1}{8} = 2 - 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda = 0$ eller $x_1 = 0$

↳ går ikke (gir $1 = 0$ i I)

Så $x_1 = 0$ $\rightsquigarrow$ inn i III

$6x_2^2 + 2x_2^2 = 3 \Rightarrow x_2 = \pm\sqrt{\frac{3}{8}}$

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3/8} \end{pmatrix}\right) = 0 + 2\sqrt{\frac{3}{8}}$ ← største verdien til f langs ellipsen.

$f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{3/8} \end{pmatrix}\right) = 0 - 2\sqrt{\frac{3}{8}}$

5) Finn største og minste verdi til $f(x) = x_1 x_2$

på $3x_1^2 + x_2^2 = 6$

La $g(x) = 3x_1^2 + x_2^2 - 6$

$\nabla f = (x_2, x_1)$

$\nabla g = (6x_1, 2x_2)$

$\nabla f = \lambda \nabla g$

$$\begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \\ \text{III} \end{array} \begin{cases} x_2 = \lambda 6 x_1 \\ x_1 = 2\lambda x_2 \\ g(x) = 0 \end{cases}$$

II gir $\lambda = \dfrac{x_1}{2x_2}$

(kan dele på x_2, siden $x_2 \neq 0$)

inn i I: $x_2 = \dfrac{x_1}{2x_2} \cdot 6x_1 \Rightarrow x_2^2 = 3x_1^2$

putte inn i $g(x) = 0$

$x_2^2 + x_2^2 = 6 \Rightarrow 2x_2^2 = 6 \quad x_2 = \pm\sqrt{3}$

$\Rightarrow \underbrace{x_2^2}_{=3} = 3x_1^2 \Rightarrow x_1 = \pm 1$

mulige punkter: $(1, \sqrt{3}), (1, -\sqrt{3}), (-1, \sqrt{3}), (-1, -\sqrt{3})$

største verdi $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right) = 1 \cdot \sqrt{3} = \sqrt{3}$

minste verdi $f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}\right) = -1 \cdot \sqrt{3} = -\sqrt{3}$