Uke 45: Trippelintegraler

9. november 2024

Vi har at

$$\int_a^b dx = \text{lengden av intervallet } [a,b]$$

$$\iint_D dA = \text{areal av området } D$$

$$\iiint_\Omega dV = \text{volume av legemet } \Omega$$

↳ Trenger parametrisering av legemet og evt koordinattransformasjoner

Videre

$$\int_a^b f(x)\,dx = \text{arealet under } f$$

$$\iint_D f(x_1,x_2)\,dA = \text{volum under } f$$

$$\iiint_\Omega f(x_1,x_2,x_3)\,dV = \text{???} \quad (\text{hypervolum})$$

↳ beste fysiske tolkning er at f er massetetthet, da blir integralet lik massen av legemet Ω

Variabelskifte (akkurat samme som for dobbeltintegraler):

$$\iiint_\Omega f(x_1,x_2,x_3)\,dx_1dx_2dx_3 = \iiint_{\Omega'} g(u_1,u_2,u_3)\underbrace{\left|\frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}\right|}_{\text{jacobideterminant}}du_1du_2du_3$$

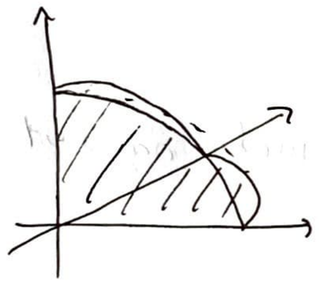
hvor $g(u_1,u_2,u_3) = f(x_1(u_1,u_2,u_3), x_2(u_1,u_2,u_3), x_3(u_1,u_2,u_3))$

altså f evaluert i parametrisering/transformasjon.

1) Massesenteret til et legeme Ω med massetetthet ρ er gitt ved

$$M = \frac{1}{\iiint_\Omega \rho \, dV} \left(\iiint_\Omega x_1 \rho \, dV, \iiint_\Omega x_2 \rho \, dV, \iiint_\Omega x_3 \rho \, dV \right)^T$$

Vi skal finne massesenteret $M = (m_{x_1}, m_{x_2}, m_{x_3})^T$ av en åttendels kule med $\rho = \text{konstant}$.



Siden $\rho = \text{konstant}$, kan vi ~~bruke~~ benytte symmetri, så ~~x~~ $m_{x_1} = m_{x_2} = m_{x_3}$, så vi trenger kun beregne to integraler.

$$M = \frac{1}{\iiint_\Omega \rho \, dV} \left(\iiint_\Omega x_1 \rho \, dV, \iiint_\Omega x_2 \rho \, dV, \iiint_\Omega x_3 \rho \, dV \right) = \frac{1}{\iiint_\Omega dV} \left(\iiint_\Omega x_1 \, dV, \dots, \dots \right)^T$$

$$\iiint_\Omega dV = \text{volum av åttendels kule} = \frac{4\pi R^3}{3} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi R^3}{6}$$

$$\iiint_\Omega x_1 \, dV = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r\cos\theta \sin\varphi \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(r, \theta, \varphi)} \right| dr \, d\theta \, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \int_0^R r\cos\theta \sin\varphi \cdot r^2 \sin\varphi \, dr \, d\theta \, d\varphi = \int_0^{\pi/2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin^2\varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R d\theta \, d\varphi$$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi \left[\sin\theta \right]_0^{\pi/2} d\varphi = \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \sin^2\varphi (1 - 0) \, d\varphi$$

$\cos 2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi$

$$= \frac{R^4}{4} \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos 2\varphi}{2} \, d\varphi = \frac{R^4}{8} \left[\varphi - \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{R^4}{8} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) = \frac{\pi R^4}{16}$$

$$\Rightarrow M = \frac{6}{\pi R^3} \left(\frac{\pi R^4}{16}, \frac{\pi R^4}{16}, \frac{\pi R^4}{16} \right)^T = \underline{\underline{\left(\frac{3R}{8}, \frac{3R}{8}, \frac{3R}{8} \right)^T}}$$

2) Skal finne volumet av

$$(x_1+x_2)^2 + x_2^2 + \frac{x_3^2}{a^2} \leq 1. \quad \leftarrow \Omega$$

Ikke helt intuitivt hva dette er form

⇝ Koordinattransformasjon!

La $u_1 = x_1 + x_2$, $u_2 = x_2$, $u_3 = \frac{x_3}{a}$, da får vi

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 \leq 1 \quad \leftarrow \text{kule i } u_1u_2u_3\text{-rommet!}$$

Så x_1, x_2 og x_3 som funksjoner av u_1, u_2 og u_3 er

$$x_1 = u_1 - u_2$$

$$x_2 = u_2$$

$$x_3 = au_3$$

Jacobideterminanten blir

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial u_1} & \frac{\partial x_1}{\partial u_2} & \frac{\partial x_1}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial u_1} & \frac{\partial x_2}{\partial u_2} & \frac{\partial x_2}{\partial u_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial u_1} & \frac{\partial x_3}{\partial u_2} & \frac{\partial x_3}{\partial u_3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a$$

Så volumet blir

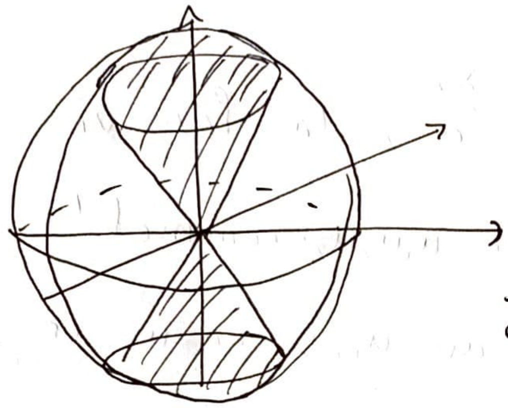
$$\text{volum}(\Omega) = \iiint_{\Omega} dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_{\Omega'} \left| \frac{\partial(x_1,x_2,x_3)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} \right| du_1 du_2 du_3$$

$$= \iiint_{\Omega'} a \, du_1 du_2 du_3 = a \cdot \text{volum(kule m radius 1)}$$

$$= a \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3} = \underline{\underline{\frac{4\pi a}{3}}}$$

3) Volumet av $x_3^2 \geq x_1^2 + x_2^2$ som ligger innenfor kulen $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$.

Ser på $x_3 \geq 0$ og ganger med to, siden vi har to like volum. La oss bruke kulekoordinater



$$x_1 = r\cos\theta\sin\varphi$$

$$x_2 = r\sin\theta\sin\varphi$$

$$x_3 = r\cos\varphi$$

Merk: alle andre enn NTNU bruker φ om θ og θ om φ. Så på wikipedia også ... : $\theta \in [0, \pi]$ og $\varphi \in [0, 2\pi]$

Jacobideterminanten for kulekoordinater er $r^2 \sin\varphi$.

Så vi skal beregne $\iiint r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$

$\rightsquigarrow$ finne integrasjonsgrenser.

Kulen har radius 1 $\Rightarrow$ $0 \leq r \leq 1$.

Vi skal "snurre helt rundt" $\Rightarrow$ $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

φ må gå fra 0 (x_3-aksen) til der kjeglen stopper, altså hvor $x_3^2 = x_1^2 + x_2^2$ $\Rightarrow$ $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ (hvis du ikke er overbevist, putt kulekoordinatene inn i likningen for kjeglen, så ender man med $\cos\varphi = \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4}$)

Så vi får

$$\text{volum} = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/4}\int_0^1 r^2 \sin\varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta = 4\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\varphi \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^1 d\varphi$$

$$= \frac{4\pi}{3}\left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi/4} = \frac{4\pi}{3}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi(4 - 2\sqrt{2})}{3}}}$$

4) Ω gitt ved $0 \leq x_3 \leq 1 - \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$, $x_2 \geq 0$. Skal beregne

$$\iiint_\Omega x_3 \sqrt{x_1^2 + x_2^2}\, dx$$

I sylinderkoordinater får vi

$x_1 = r\cos\theta$

$x_2 = r\sin\theta \quad \Rightarrow \Omega$ gitt ved $0 \leq z \leq 1 - r$

$x_3 = z$

Jacobideterminanten for sylinderkoordinater er r, så integralet blir

$$\iiint z \cdot r \cdot r \, dr\, d\theta\, dz$$

$\rightsquigarrow$ finne integrasjonsgrenser

Grensene for z har vi fått $\Rightarrow 0 \leq z \leq 1 - r$

Siden $x_2 \geq 0$, skal θ kun snurre en halv runde $\Rightarrow 0 \leq \theta \leq \pi$.

r går fra 0 til der kjeglen skjærer x_1x_2-planet. I x_1x_2-planet er $x_3 = 0 \Rightarrow x_1^2 + x_2^2 = 1$, så radiusen til kjeglen i x_1x_2-planet er $1 \Rightarrow 0 \leq r \leq 1$.

Så integralet blir

$$\iiint_\Omega x_3\sqrt{x_1^2+x_2^2}\, dx = \int_0^{\pi}\int_0^1\int_0^{1-r} z r^2\, dz\, dr\, d\theta = \pi \int_0^1 r^2 \left[\frac{z^2}{2}\right]_0^{1-r} dr$$

$$= \pi \int_0^1 r^2 \left(\frac{(1-r)^2}{2}\right) dr = \frac{\pi}{2}\int_0^1 r^2 - 2r^3 + r^4\, dr$$

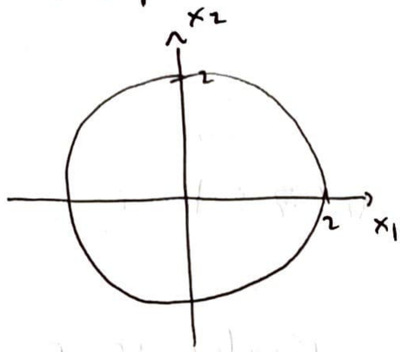
$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{r^3}{3} - \frac{2r^4}{4} + \frac{r^5}{5}\right]_0^1 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{\pi}{30}\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{60}}}$$

5) Ω begrenset av $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$, $x_3 = 0$, $x_3 = \sqrt{5}$

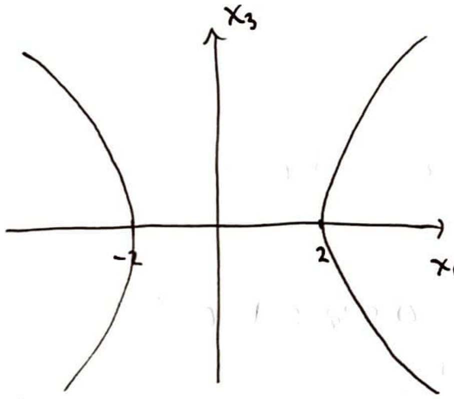
La oss starte med å finne ut av hva slags legeme Ω er.

I x_1x_2-planet er $x_3 = 0 \Rightarrow 0 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4} \Leftrightarrow x_1^2 + x_2^2 = 4$



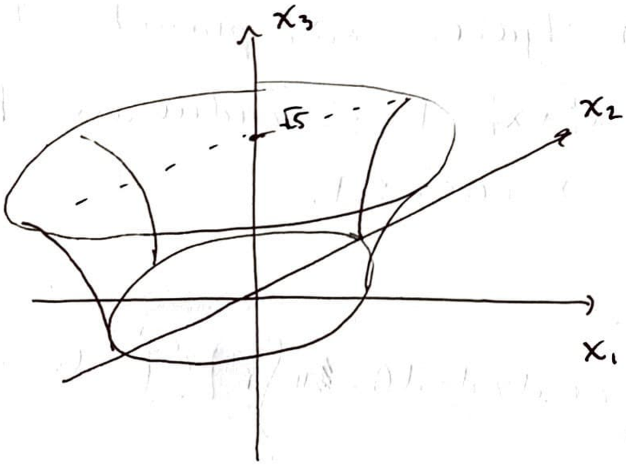
altså sirkel med radius 2.

I x_1x_3-planet er $x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = \sqrt{x_1^2 + 0^2 - 4} \Leftrightarrow x_1^2 - x_3^2 = 4$



altså en hyperbel.

Ved å sette dette sammen, ser vi at Ω ser ish slik ut:



Bruker sylinderkoordinater $\Rightarrow$ jacobideterminant er r.

$\rightsquigarrow$ finne integrasjonsgrenser

Ω er mellom planene $x_3 = 0$ og $x_3 = \sqrt{5} \Rightarrow 0 \leq z \leq \sqrt{5}$

Skal "snurre helt rundt" $\Rightarrow$ $0 \le \theta \le 2\pi$

r går fra 0 og ut til hyperbelen. I sylinderkoordinater er $x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 - 4}$ gitt ved $z = \sqrt{r^2 - 4}$, så r på hyperbelen er $r = \sqrt{z^2+4}$. $\Rightarrow$ $0 \le r \le \sqrt{z^2+4}$

Så volumet blir

$$\text{volum}(\Omega) = \iiint_\Omega dV$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\sqrt{5}}\int_0^{\sqrt{z^2+4}} r \, dr \, dz \, d\theta$$

$$= 2\pi \int_0^{\sqrt{5}} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^{\sqrt{z^2+4}} dz$$

$$= \frac{2\pi}{2}\int_0^{\sqrt{5}} z^2 + 4 \, dz$$

$$= \pi \left[\frac{z^3}{3} + 4z\right]_0^{\sqrt{5}}$$

$$= \pi\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + 4\sqrt{5}\right)$$

$$= \underline{\underline{\frac{17\pi\sqrt{5}}{3}}}$$

OBS! Jeg sa feil til noen som kom opp etter forelesningen og lurte på om man kan bruke $[0, \sqrt{r^2-4}]$ som grenser for z her - det går IKKE! Grensene for z kunne vært

$$\underbrace{\int_0^{2\pi}\int_0^{2}\int_0^{\sqrt{5}} r \, dz \, dr \, d\theta}_{\text{sylinder m radius 2 høyde } \sqrt{5}} + \underbrace{\int_0^{2\pi}\int_2^{3}\int_{\sqrt{r^2-4}}^{\sqrt{5}} r \, dz \, dr \, d\theta}_{\text{ytre del av volumet}}$$

↳ dette gir samme svar, men blir et litt styggere integral

6) Skal finne volumet til

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1 \quad \leftarrow \Omega$$

La $u_1 = \frac{x_1}{a}$, $u_2 = \frac{x_2}{b}$, $u_3 = \frac{x_3}{c}$ $\Leftrightarrow$ $x_1 = au_1$, $x_2 = bu_2$, $x_3 = cu_3$

Da blir likningen

$$u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 = 1$$ ← kule i $u_1u_2u_3$-rommet med radius 1.

Jacobideterminanten blir

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

Så volumet blir

$$\text{volum} = \iiint_{\Omega} dx_1 dx_2 dx_3$$

$$= \iiint_{\Omega'} \left| \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(u_1, u_2, u_3)} \right| du_1 du_2 du_3$$

$$= \iiint_{\Omega'} abc \, du_1 du_2 du_3$$

$$= abc \cdot \text{volum(kule m radius 1)}$$

$$= abc \cdot \frac{4\pi \cdot 1^3}{3}$$

$$= \underline{\underline{\frac{4\pi abc}{3}}}$$

(Gir mening, siden $a = b = c = r$ er jo en kule med radius r og da blir $\frac{4\pi abc}{3} = \frac{4\pi r^3}{3}$ som er volumet av en kule m radius r)