Uke 44: Flateintegraler

Skal integrere over flater på "samme" måte som vi integrerte over kurver (linjeintegraler).

↳ Trenger parametriseringer av flater.

Husk: parametrisering av kurve $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ tok én variabel t og ga punkter i planet $(x_1(t), x_2(t))^T$ som ligger på kurven g parametriserer.

Parametrisering av flate $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tar inn to variabler s, t og gir punkter i rommet $(x_1(s,t), x_2(s,t), x_3(s,t))^T$ som ligger på flaten.

Typiske flater:

(1) Sylinder med radius R og høyde h, gitt ved

$$g: [0, 2\pi) \times [0, h] \to \mathbb{R}^3$$

$$g(\theta, z) = \begin{pmatrix} R\cos\theta \\ R\sin\theta \\ z \end{pmatrix}$$

(2) Kule med radius R, gitt ved

$$g: [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$$

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta\sin\varphi \\ R\cos\varphi \end{pmatrix}$$

(3) En funksjon $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ danner en flate som er parametrisert med $g(x_1, x_2) = (x_1, x_2, f(x_1, x_2))^T$.

Flateintegral: La $g: \Omega \to \mathbb{R}^3$, hvor $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$, være en parametrisering av flaten Σ. Flateintegralet av funksjonen $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ over Σ er gitt ved

$$\iint_\Sigma f \, dS = \iint_\Omega f(g(x)) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$

→

Liten oppsummering av linjeintegral og flateintegral.

KURVEINTEGRAL:

La:

$f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ skalarfelt

$F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vektorfelt $(n=2,3)$

Γ kurve parametrisert med $x: [a,b] \to \mathbb{R}^n$

Kurveintegral ~~over~~ av f over Γ

$$\int_\Gamma f\, ds = \int_a^b f(x(t))\,|\dot{x}(t)|\,dt$$

Kurveintegral ~~over~~ av F over Γ

$$\int_\Gamma F \cdot d\vec{s} = \int_a^b F(x(t))^T \dot{x}(t)\,dt$$

FLATEINTEGRAL:

La:

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ skalarfelt

$F: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ vektorfelt

Σ flate parametrisert med $g: \Omega \to \mathbb{R}^3$

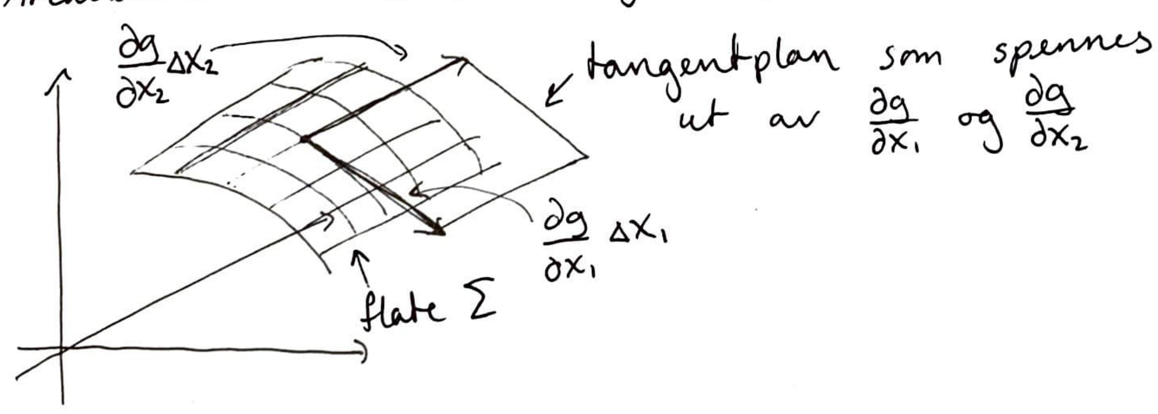
Flateintegral ~~over~~ av f over Σ

$$\iint_\Sigma f\, dS = \iint_\Omega f(g(x)) \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$$

Flateintegral av F over Σ

$$\iint_\Sigma F \cdot d\vec{S} = \iint_\Sigma F \cdot N\, dS = \iint_\Omega F(g(x)) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2$$

Arealelementet i et flateintegral: $\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$



Ser på et rektangel med sidelengder Δx_1 og Δx_2 i Ω.
Dette sendes til et parallellogram med sider gitt av vektorene $\frac{\partial g}{\partial x_1} \Delta x_1$ og $\frac{\partial g}{\partial x_2} \Delta x_2$. ← La θ være vinkelen mellom disse.

Arealet av dette parallellogrammet er (fra arealsetningen)

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \right| \Delta x_1 \cdot \left| \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \Delta x_2 \sin\theta = \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| \Delta x_1 \Delta x_2$$

$|u \times v| = |u||v|\sin\theta$

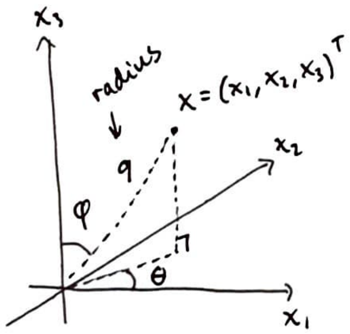
$\rightsquigarrow$ Lar $\Delta x_1 \to 0$, $\Delta x_2 \to 0$ $\Rightarrow$ $\text{areal}(\Sigma) = \iint_\Omega \left| \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \right| dx_1 dx_2$

2) Σ er kule med radius 9. Skal beregne arealet av den delen av Σ som ligger over planet $x_3 = 2$.

Hele Σ kan parametriseres med $g: [0, 2\pi) \times [0, \pi] \to \mathbb{R}^3$ gitt ved

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 9\cos\theta\sin\varphi \\ 9\sin\theta\sin\varphi \\ 9\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

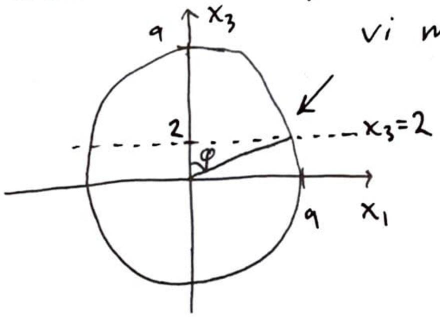
↳ hva er θ og φ? Kan vi justere de til å kun få den delen av Σ som ligger over $x_3 = 2$? → Ja!



Et vilkårlig punkt x på Σ er tegnet her. Vinkelen θ er det vi er vant med fra polarkoordinater, så her må θ "snurre helt rundt", aka $\theta \in [0, 2\pi)$.

Vinkelen φ er vinkelen mellom x_3-aksen og vektoren ut til punktet x. (Så $\varphi = 0$ for alle punkter på + delen av x_3-aksen) Så f.eks. hvis vi skulle hatt en halvkule hadde vi latt $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

La oss se på tverrsnittet av kulen



vi må altså la $\varphi \in [0, \arccos(\frac{2}{9})]$

$\cos\varphi = \frac{2}{9} \Rightarrow \varphi = \arccos\frac{2}{9}$

Så: en parametriseng av den delen av Σ som ligger over $x_3 = 2$ er gitt ved $g: [0, 2\pi) \times [0, \arccos\frac{2}{9}] \to \mathbb{R}^3$ hvor

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} 9\cos\theta\sin\varphi \\ 9\sin\theta\sin\varphi \\ 9\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

→

Vi skal beregne

$$\text{areal}\left(\begin{matrix}\text{den delen av } \Sigma \\ \text{som er over } x_3 = 2\end{matrix}\right) = \iint_{\substack{\Sigma \text{ over} \\ x_3=2}} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\frac{2}{9}} \left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right| \partial\varphi \, d\theta$$

Beregne partiell deriverte

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-9\sin\theta\sin\varphi,\ 9\cos\theta\sin\varphi,\ 0)^T$$

$$\frac{\partial g}{\partial \varphi} = (9\cos\theta\cos\varphi,\ 9\sin\theta\cos\varphi,\ -9\sin\varphi)^T$$

Beregne kryssprodukt

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -9\sin\theta\sin\varphi & 9\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ 9\cos\theta\cos\varphi & 9\sin\theta\cos\varphi & -9\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \left(-81\cos\theta\sin^2\varphi,\ -81\sin\theta\sin^2\varphi,\ -81\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi - 81\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi\right)^T$$

Beregne lengde av kryssprodukt

$$\left|\frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi}\right| = \sqrt{81^2\cos^2\theta\sin^4\varphi + 81^2\sin^2\theta\sin^4\varphi + (81\sin^2\theta\sin\varphi\cos\varphi + 81\cos^2\theta\sin\varphi\cos\varphi)^2}$$

$$= 81\sqrt{\sin^4\varphi(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + (\sin\varphi\cos\varphi)^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2}$$

$$= 81\sqrt{\sin^4\varphi + \sin^2\varphi\cos^2\varphi} = 81\sqrt{\sin^2\varphi(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)} = \underline{81\sin\varphi}$$

Så arealet blir

$$\text{areal} = \iint_{\substack{\Sigma \text{ over} \\ x_3=2}} dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\arccos\frac{2}{9}} 81 \sin\varphi \, d\varphi \, d\theta = 81 \cdot 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_0^{\arccos\frac{2}{9}}$$

$$= 81 \cdot 2\pi\left(-\cos\left(\arccos\frac{2}{9}\right) + \cos 0\right) = 81 \cdot 2\pi\left(-\frac{2}{9} + 1\right)$$

$$= \frac{81 \cdot 2\pi \cdot 7}{9} = 2 \cdot 7 \cdot 9\pi = \underline{\underline{126\pi}}$$

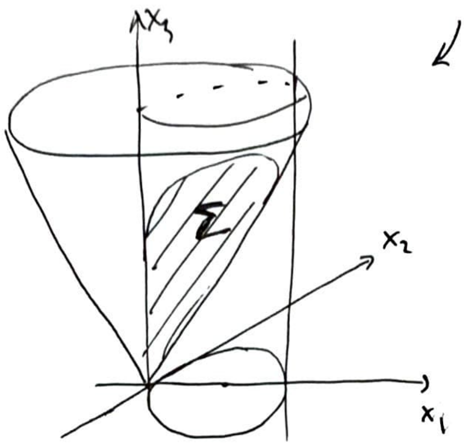
~~3~~) 2 For å finne arealet av Σ trenger vi en parametrisering.

$x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ for $x_3 \geq 0$ er en kjegle som står opp ned.

$x_1^2 + x_2^2 = 2x_1 \iff x_1^2 - 2x_1 + 1 + x_2^2 = 1 \iff (x_1 - 1)^2 + x_2^2 = 1$

↳ sylinder med sentrum i $(1,0)$ og radius 1.

Så Σ ser ish sånn her ut



et slags "blad" over sirkelen med sentrum i $(1,0)$ og radius 1.

Vi kan parametrisere Σ ved å parametrisere grunnflaten i sylinderen, og så finne x_3 komponenten fra uttrykket for kjeglen.

Grunnflaten i sylinderen er gitt ved $(r\cos\theta + 1, r\sin\theta)$ for $0 \leq r \leq 1$ og $\theta \in [0, 2\pi)$. Dermed er x_3 gitt ved

$$x_3 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \sqrt{(r\cos\theta + 1)^2 + (r\sin\theta)^2}$$

$$= \sqrt{r^2\cos^2\theta + 2r\cos\theta + 1 + r^2\sin^2\theta} = \sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}$$

Så Σ er parametrisert ved $g: [0,1] \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3$ gitt ved $g(r,\theta) = (r\cos\theta + 1, r\sin\theta, \sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1})^T$.

Beregne partiellderiverte:

$$\frac{\partial g}{\partial r} = \left(\cos\theta, \sin\theta, \frac{2\cos\theta + 2r}{2\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}}\right)^*$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = \left(-r\sin\theta, r\cos\theta, \frac{-2r\sin\theta}{2\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}}\right)$$

⟶

Så: beregne kryssprodukt

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & \sin\theta & \frac{\cos\theta + r}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}} \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & \frac{-r\sin\theta}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2+1}} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{-r\sin^2\theta - r\cos^2\theta - r^2\cos\theta}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}}, \frac{+r\sin\theta\cos\theta \mp r\sin\theta\cos\theta \mp r^2\sin\theta}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}}, r \right)^T$$

$$= \left(\frac{-r - r^2\cos\theta}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2 + 1}}, \frac{-r^2\sin\theta}{\sqrt{2r\cos\theta + r^2+1}}, r \right)^T$$

Så: lengde av kryssprodukt

$$\left| \frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} \right| = \sqrt{\frac{(r + r^2\cos\theta)^2 + r^4\sin^2\theta}{2r\cos\theta + r^2 + 1} + r^2}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2 + 2r^3\cos\theta + r^4\cos^2\theta + r^4\sin^2\theta}{2r\cos\theta + r^2 + 1} + r^2}$$

$$= \sqrt{\frac{r^2(1 + 2r\cos\theta + r^2)}{2r\cos\theta + r^2 + 1} + r^2}$$

$$= \sqrt{2}\, r$$

Arealet blir dermed

$$\text{areal}(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{2}\, r \, dr \, d\theta$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^1$$

$$= 2\sqrt{2}\pi \cdot \frac{1}{2} = \underline{\underline{\sqrt{2}\pi}}$$

3) Skal finne massesenteret av $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = R^2$ hvor $x_3 \geq 0$ og vi har konstant massetetthet.

Generelt: Massesenteret til en flate Σ med massetetthet gitt ved $\rho : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ er

$$M = \frac{1}{\iint_\Sigma \rho \, dS} \left(\iint_\Sigma x_1 \rho \, dS , \iint_\Sigma x_2 \rho \, dS , \iint_\Sigma x_3 \rho \, dS \right)^T$$

Siden vi i denne oppgaven har konstant massetetthet er ρ en konstant og kan trekkes ut av integralene.

Av symmetri har vi at x_1 og x_2 komponenten til M er 0, altså at massesenteret M ligger langs x_3-aksen.

Så:

$$M = \frac{1}{\rho \iint_\Sigma dS} \left(0 , 0 , \rho \iint_\Sigma x_3 \, dS \right) = \frac{1}{\text{areal}(\Sigma)} \left(0, 0, \iint_\Sigma x_3 \, dS \right)$$

Vi skal beregne

$$\text{areal}(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \iint \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| d\varphi \, d\theta$$

og $$\iint_\Sigma x_3 \, dS = \iint x_3(\theta, \varphi) \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| d\varphi \, d\theta$$

hvor $g(\theta, \varphi)$ er en parametrisering av Σ. En mulig parametrisering er $g : [0, 2\pi) \times [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^3$ hvor

$$g(\theta, \varphi) = \begin{pmatrix} R \cos\theta \sin\varphi \\ R \sin\theta \sin\varphi \\ R \cos\varphi \end{pmatrix}$$

Vi har funnet at dette gir $\left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| = R^2 \sin\varphi$.

$\rightarrow$

Så vi får

$$\text{areal}(\Sigma) = \iint_\Sigma dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} R^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi R^2 \Big[-\cos\varphi \Big]_0^{\pi/2} = 2\pi R^2 \left(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 \right)$$

$$= 2\pi R^2$$ (som forventet, siden overflatearealet av en hel kule er $4\pi R^2$)

x_3-komponenten blir

$$\iint_\Sigma x_3\, dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} x_3(\theta,\varphi) \left| \frac{\partial g}{\partial \theta} \times \frac{\partial g}{\partial \varphi} \right| d\varphi\, d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} R\cos\varphi \cdot R^2 \sin\varphi \, d\varphi\, d\theta$$

$$= 2\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= 2\pi R^3 \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\sin 2\varphi \, d\varphi = \pi R^3 \left[-\frac{1}{2}\cos 2\varphi \right]_0^{\pi/2}$$

$$= \pi R^3 \left(-\frac{1}{2}(-1) + \frac{1}{2} \right) = \pi R^3$$

Så massesenteret blir

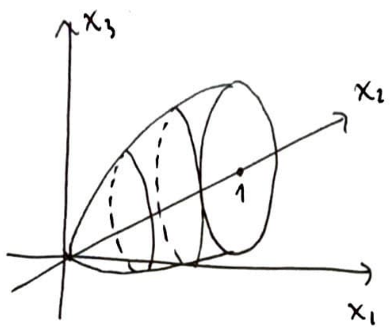
$$M = \frac{1}{2\pi R^2} \left(0, 0, \pi R^3\right)^T = \underline{\underline{\left(0, 0, \frac{R}{2}\right)^T}}$$

4) Skal beregne fluksen av F ut av $\partial\Omega$, altså

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS = \iint_{\partial\Omega} F \cdot N \, dS = \iint F(g(x)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1} \times \frac{\partial g}{\partial x_2} \, dx$$

hvor g er en parametrisering av $\partial\Omega$.

$\partial\Omega$ ser ish slik ut



← paraboloide langs x_2-aksen.

Merk at det er to "deler" av $\partial\Omega$, ~~sirkelen~~ disken med sentrum i $(0,1,0)^T$ og selve paraboloiden.

La Σ_1 være delen av $\partial\Omega$ som er selve paraboloiden, og Σ_2 være disken med sentrum i $(0,1,0)^T$.

⇝ finne fluksen ut av Σ_1 og Σ_2

Starter med Σ_1, må finne parametrisering.

↳ Kan parametrisere disken i x_1x_3-planet og så finne x_2-komponenten fra at $x_1^2 + x_3^2 = x_2$ på Σ_1.

~~Sirkelen~~ Disken i x_1x_3-planet kan parametriseres ved $x_1(r,\theta) = r\cos\theta$, $x_3(r,\theta) = r\sin\theta$ hvor $\theta \in [0, 2\pi)$ og $0 \leq r \leq 1$, siden $x_2 \leq 1$, så $x_2 = r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = r^2 \leq 1 \Rightarrow r \leq 1$.

Så parametriseringen av Σ_1 er gitt ved

$$g(r,\theta) = (r\cos\theta, r^2, r\sin\theta) \text{ for } \theta \in [0, 2\pi), \; r \in [0,1].$$

Partiellderiverte blir

$$\frac{\partial g}{\partial r} = (\cos\theta, 2r, \sin\theta)$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta} = (-r\sin\theta, 0, r\cos\theta)$$

Kryssproduktet blir

$$\frac{\partial g}{\partial r} \times \frac{\partial g}{\partial \theta} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos\theta & 2r & \sin\theta \\ -r\sin\theta & 0 & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= \left(2r^2\cos\theta\,,\, -r\cos^2\theta - r\sin^2\theta\,,\, 2r^2\sin\theta\right)^T$$

$$= \left(2r^2\cos\theta, -r, 2r^2\sin\theta\right)^T$$

Så må vi evaluere vektorfeltet i $g(r,\theta)$.

$$F(g(r,\theta)) = (0, x_2(r,\theta), -x_3(r,\theta))^T$$

$$= (0, r^2, -r\sin\theta)^T$$

Så fluksen av F ut av Σ_1 blir

$$\iint_{\Sigma_1} F\cdot dS = \int_0^{2\pi}\int_0^1 F(g(r,\theta))\cdot \frac{\partial g}{\partial r}\times\frac{\partial g}{\partial \theta}\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 (0, r^2, -r\sin\theta)^T \cdot (2r^2\cos\theta, -r, 2r^2\sin\theta)^T\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^1 -r^3 - 2r^3\sin^2\theta\,dr\,d\theta = \int_0^{2\pi}(1+2\sin^2\theta)\int_0^1 -r^3\,dr\,d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi}(1+2\sin^2\theta)\,d\theta\left[-\frac{r^4}{4}\right]_0^1 = -\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} 1 + 1 - \cos 2\theta\,d\theta$$

$$\boxed{\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta}$$

$$= -\frac{1}{4}\left[2\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{2\pi} = -\frac{1}{4}\left(2\cdot 2\pi - 0 - 0 + 0\right)$$

$$= -\pi \quad \leftarrow \text{fluksen ut av } \Sigma_1$$

Så må vi beregne fluksen ut av Σ_2, nemlig

$$\iint_{\Sigma_2} F \cdot N \, dS$$

Her kan vi være lure. Hva er N på Σ_2?

Σ_2 er jo parallell med x_1x_3-planet, så

$N = (0, 1, 0)^T$ på Σ_2.

Så integranden blir

$$F \cdot N = (0, x_2, -x_3) \cdot (0, 1, 0) = x_2$$

Så fluksen er

$$\iint_{\Sigma_2} x_2 \, dS$$

Men på Σ_2 er $x_2 = 1$, så fluksen blir

$$\iint_{\Sigma_2} dS = \text{areal}(\Sigma_2)$$

$$= \text{areal (sirkel m radius 1)}$$

$$= \pi \cdot 1^2$$

Så den totale fluksen ut av $\partial\Omega$ blir

$$\iint_{\partial\Omega} F \cdot dS = \iint_{\Sigma_1} F \cdot dS + \iint_{\Sigma_2} F \cdot dS$$

$$= -\pi + \pi$$

$$= \underline{\underline{0}}$$