Harmoniske funksjoner

Vi sier at en funksjon $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er harmonisk dersom

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} = 0$$

der x_i er i'te koordinat i $\mathbb{R}^n$.

Dette semesteret har vi kun sett på $n = 2$, der vi sier en funksjon u er harmonisk dersom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Oppgave 1

Avgjør om følgende funksjoner er harmoniske

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2$

(b) $u(x, y) = 2xy$

(c) $u(x, y) = y^4 - x^4$

(d) $u(x, y) = 2y^3 - 6x^2y + 4x^2 + 3x - 4y^2 - 4$

Oppgave 2

Vis at Laplaces likning er en **rotasjonsinvariant**, altså at de rene partiellderiverte summerer til det samme også om du roterer koordinatsystemet.

Oppgave 3

La Ω være en sirkelskive med radius r, sentrert i x. Vis at

$$u(x) = \frac{1}{2\pi r} \int_{\partial\Omega} u \, \mathrm{d}s = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u \, \mathrm{d}A$$

dersom u er harmonisk på et område som inneholder Ω.

En liten definisjon - harmoniske konjugater

La $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ være en funksjon. Vi skriver $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ der $z = x + iy$. Når f er kompleks deriverbar, er u og v harmoniske, og vi sier at v er det *harmoniske konjugatet* til u. For enhver harmonisk funksjon u' finnes et harmonisk konjugat v'.

For oppgavene under er det viktig å anta at vi jobber på et *enkeltsammenhengende domene*. Akkurat hva det betyr er ikke så nøye, annet enn at alle operasjoner du tror du får lov til å gjøre får du mest sannsynlig lov til å gjøre. For de interesserte: `https://en.wikipedia.org/wiki/Simply_connected_space`

Oppgave 4

"v er det harmoniske konjugatet til u hvis og bare hvis u er det harmoniske konjugatet til $-v$"

Vis dette.

Oppgave 5

Under er funksjonene fra oppgave 1. Dersom de er harmoniske, finn det harmoniske konjugatet v slik at $f = u + iv$ er kompleks deriverbar.

(a) $u(x, y) = x^2 - y^2$

(b) $u(x, y) = 2xy$

(c) $u(x, y) = y^4 - x^4$

(d) $u(x, y) = 2y^3 - 6x^2y + 4x^2 + 3x - 4y^2 - 4$

Oppgave $6 - \varepsilon$

La $f = u + iv$ være en kompleks deriverbar funksjon. Vis at dersom u eller v er konstant, så er f konstant.
Hint: Cauchy-Riemann

Oppgave 6

I oppgave 5 merket du kanskje at for en harmonisk funksjon u finnes det en harmonisk funksjon v slik at $f = u + iv$ er kompleks deriverbar, men det var ikke nødvendigvis unikt. Vis dette. I litt mer ord: Vis at det harmoniske konjugatet v til en harmonisk funksjon u er unikt opp til addisjon av en konstant.
Hint: Bruk forrige oppgave