Harmoniske funksjoner

Vi sier en funksjon $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er <u>harmonisk</u> dersom vi har at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = 0$$

Dette gjelder ikke bare for 2 dimensjoner, for vi sier generelt at en funksjon $u': \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er <u>harmonisk</u> dersom

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u'}{\partial x_i^2} = 0$$

En kompakt måte vi kan si dette med terminologi dere er kjent med, er å si at divergensen til gradienten er 0. Operatoren som gir divergensen til gradienten kalles Laplace-operatoren, og vi skriver som regel $\nabla \cdot \nabla$, ∇^2 eller Δ som notasjon for denne operatoren.

Oppgave 1

A)

Vi regner ut de nødvendige derivasjonene.

$$U(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2$$

Vi ser at u er harmonisk siden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 2 + (-2) = \underline{0}$$

B)

$$U(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

u er harmonisk ettersom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 + 0 = \underline{0}$$

C)

$$u(x,y) = y^4 - x^4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -4x^3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 4y^3$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -12x^2 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2$$

u er ikke harmonisk siden

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y^2 - 12x^2 \neq \underline{0}$$

D)

$$u(x,y) = 2y^3 - 6x^2y + 4x^2 + 3x - 4y^2 - 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -12xy + 8x + 3 \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = 6y^2 - 6x^2 - 8y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -12y + 8 \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 12y - 8$$

u er harmonisk ettersom

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = (-12y + 8) + (12y - 8) = \underline{0}$$

Oppgave 2

La $u: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være en tovariabel to-ganger deriverbar funksjon.

Vi skal vise at dersom vi roterer koordinatsystemet, vil verdien til Laplace-operatoren være uendret. La x_1 og x_2 være de originale koordinatene og innfør roterte koordinater y_1 og y_2 som

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = R(\theta)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x_1\cos\theta - x_2\sin\theta \\ x_1\sin\theta + x_2\cos\theta \end{pmatrix}$$

Vi skal vise at

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

For utregningene trenger vi verdiene

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1}, \quad \frac{\partial x_1}{\partial y_2}, \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

Vi har likningene

$$y_1 = x_1 \cos\theta - x_2 \sin\theta$$

$$y_2 = x_1 \sin\theta + x_2 \cos\theta$$

og deriverer vi disse med hensyn på først y_1 får vi et likningssett med

$\dfrac{\partial x_1}{\partial y_1}$ og $\dfrac{\partial x_2}{\partial y_1}$, og vi får løsningene

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_1} = \cos\theta \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\sin\theta .$$

Gjør vi det samme med y_2 får vi

$$\frac{\partial x_1}{\partial y_2} = \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial x_2}{\partial y_2} = \cos\theta$$

Med de på plass kan vi starte utregningene

$$\frac{\partial u}{\partial y_1} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_1}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_1}\right)$$

$$= \underline{\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial y_1}\right) = \frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\theta - \frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\theta\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\sin\theta\right)\cos\theta$$

$$- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\cos\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$\underline{= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\cos^2\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\cos\theta\sin\theta - \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\sin^2\theta}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y_2} = \frac{\partial u}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial y_2} + \frac{\partial u}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial y_2}$$

$$\underline{= \frac{\partial u}{\partial x_1}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\theta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial y_2}\right) = \frac{\partial}{\partial y_2}\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\theta\right)$$

$$= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}\cos\theta\right)\sin\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1}\sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}\cos\theta\right)\cos\theta$$

$$= \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} \sin^2\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \cos\theta \sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} \cos\theta \sin\theta + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \cos^2\theta$$

Vi legger uttrykkene sammen, og bruker identiteten $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, og får

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y_2^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}$$

og med det har vi vist at Laplace-operatoren er en rotasjonsinvariant.

Oppgave 3

Vi starter med å vise den første likheten.

Ettersom vi skal parametrisere sirkelen i løpet av beviset, endrer vi notasjonen litt, og sier at sirkelen er sentrert i $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$.

For første steg skal vi bruke Greens teorem

$$\oint_{\partial\Omega} F \circ n \, ds = \iint_{\Omega} \nabla \circ F \, dA$$

Vi bruker at $F = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right)$, $n \, ds = (dx_2, -dx_1)$,

og vi får at venstresiden blir

$$\oint_{\partial\Omega} F \circ n \, ds = \oint_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} \right) \circ (dx_2, -dx_1)$$

$$= \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1$$

og høyresiden blir (fordi u er harmonisk)

$$\iint_{\Omega} \nabla \circ F \, dA = \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} \, dA = 0$$

Dermed har vi

$$0 = \oint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 - \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1$$

Vi parametriserer $\partial\Omega$ med $(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta)$ med $0 \leq \theta \leq 2\pi$, og vi har

$$x_1 = a + R\cos\theta \implies dx_1 = -R\sin\theta \, d\theta$$

$$x_2 = b + R\sin\theta \implies dx_2 = R\cos\theta \, d\theta$$

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial x_1}(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) \cdot R\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial x_2}(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) \cdot R\sin\theta \, d\theta$$

Vi kan dele begge sider på R og skrive om integranden.

$$0 = \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial R}(a + R\cos\theta, b + R\sin\theta) \, dt$$

Videre bruker vi "Leibniz Rule" (gjerne søk den opp om dere ikke har hørt om den), og får

$$0 = \frac{d}{dR} \int_0^{2\pi} u(a+R\cos\theta, b+R\sin\theta)\, d\theta$$

Vi integrerer begge sider fra $R=0$ til $R=r$ og får

$$0 = \int_0^r \frac{d}{dR} \int_0^{2\pi} u(a+R\cos\theta, b+R\sin\theta)\, d\theta\, dR$$

Med analysens fundamentalteorem får vi

$$0 = \int_0^{2\pi} u(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta)\, d\theta - \int_0^{2\pi} u(a,b)\, d\theta$$

$$= \frac{1}{r} \int_0^{2\pi} u(a+r\cos\theta, b+r\sin\theta) \cancel{r}\, d\theta - 2\pi\, u(a,b)$$

$$= \frac{1}{r} \oint_{\partial\Omega} u(x_1,x_2)\, ds - 2\pi\, u(a,b)$$

$$\Longrightarrow \quad u(a,b) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{\partial\Omega} u(x_1,x_2)\, ds$$

For siste likhet innfører vi en ny notasjon. Vi lar $B(x;r)$ være en sirkelskive sentrert i x med radius r. Vi lar $\partial B(x;r)$ betegne grensen/randen til denne sirkelskiven.

$$\iint_{B((a,b);r)} u(x_1,x_2)\, dA = \int_0^r \left(\oint_{\partial B((a,b);R)} u(x_1,x_2)\, ds \right) dR$$

$$= \int_0^r 2\pi R\, u(a,b)\, dR$$

$$= u(a,b) \cdot \pi r^2$$

Som gir

$$u(a,b) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{\Omega} u(x_1,x_2)\, dA$$

I ord betyr dette at for en harmonisk funksjon vil verdien i et punkt være gjennomsnittet av verdiene på en sirkelskive sentrert i det ønskede punktet, eller gjennomsnittet av grensen/randen til denne sirkelskiven.

Oppgave 4

"v er det harmoniske konjugatet til u" blir det samme som at $f := u + iv$ er kompleks deriverbar.

For det andre utsagnet får vi at $g := -v + iu$ er kompleks deriverbar.

$\Rightarrow$)

Vi starter med implikasjonen

"f er kompleks deriverbar gir at g er kompleks deriverbar"

Vi antar at f er kompleks deriverbar.

Vi sjekker om g er det med Cauchy-Riemann likningene. Vi trenger at

$$\frac{\partial(-v)}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{og} \quad \frac{\partial(-v)}{\partial y} = -\frac{\partial u}{\partial x}$$

Vi skriver om til

$$-\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{og} \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Disse likningene vet vi stemmer ettersom f er kompleks deriverbar, og vi har dermed at g også er det

$\Leftarrow$

For den andre veien gjør vi akkurat samme, vi sjekker for f med å skrive om Cauchy-Riemann likningene til formen vi vet stemmer fordi g er kompleks deriverbar. Skriver ikke utregningen her, men gå gjerne over den selv om du ikke er overbevist.

Oppgave 5

Fra oppgave 1 vet vi at C ikke er harmonisk, så vi finner det harmoniske konjugatet til A, B og D.

A) Vi bruker Cauchy-Riemann likningene:

$$u(x,y) = x^2 - y^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

$$\overset{\text{(integrerer)}}{\Rightarrow} \quad \underline{v = 2xy + g(x)}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow 2y + g'(x) = 2y$$

$$\Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\overset{\text{(integrerer)}}{\Rightarrow} \quad \underline{g(x) = C}$$

Dermed har vi det harmoniske konjugatet

$$v = 2xy + C$$

der C er en integrasjonskonstant

B

$$U(x,y) = 2xy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 2y$$

$$\Rightarrow \underline{v = y^2 + g(x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow g'(x) = -2x$$

$$\Rightarrow \underline{g(x) = -x^2 + C}$$

Det gir oss det harmoniske konjugatet

$$V = y^2 - x^2 + C$$

De litt oppmerksomme ser kanskje også at vi kan bruke oppgave 4. Da får vi med en gang at

$$V = -(x^2 - y^2) = y^2 - x^2$$

er et harmonisk konjugat, men her mangler vi integrasjonskonstanten.

D)

$$u(x,y) = 2y^3 - 6x^2y + 4x^2 + 3x - 4y^2 - 4$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = -12xy + 8x + 3$$

$$\Rightarrow \underline{v = -6xy^2 + 8xy + 3y + g(x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow 6y^2 - 8y + g'(x) = 6y^2 - 6x^2 - 8y$$

$$\Rightarrow g'(x) = -6x^2$$

$$\Rightarrow \underline{g(x) = -2x^3 + C}$$

Der med fant vi det harmoniske konjugatet

$$v = -6xy^2 + 8xy + 3y - 2x^3 + C$$

Oppgave 6-ε

Vi viser det for u konstant, men beviset er omtrent helt likt for v konstant.

Vi bruker Cauchy-Riemann, og ettersom u er konstant får vi

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\Rightarrow \underline{v = g(x)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \Rightarrow g'(x) = 0$$

$$\Rightarrow \underline{g(x) = C}$$

Dermed har vi at

$$v = C$$

så v er også konstant, og

$$f = u + iv$$

er dermed også konstant

Oppgave 6

La v_1 og v_2 være to konjugater til u.

Da er $f_1 := u + iv_1$ og

$$f_2 := u + iv_2$$

begge kompleks deriverbare, og dermed også differansen deres

$$f := f_1 - f_2 = i(v_1 - v_2)$$

Vis vi skriver f på formen

$$f = u' + iv'$$

har vi $u' = 0$ og $v' = v_1 - v_2$.

Men u' er konstant, så f er konstant, og dermed er v' konstant, og vi er ferdig siden

$$v_1 = v_2 + c$$

der $c = v'$