2-9 Komplekse indreproduktrom LF

Astrid Mysterud, mars 2024

1) Ved å konjugere og transponere får vi

$$A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 2 & 2+i \\ 1+i & i & 1-i \end{bmatrix}.$$

2) La $z = z_1 + z_2 i$ og $w = w_1 + w_2 i$, med $|w| = 1$. Produktet $w^* z$ blir

$$w^* z = (w_1 - w_2 i)(z_1 + z_2 i) = w_1 z_1 + w_1 z_2 i - w_2 z_1 i + w_2 z_2 = (z_1 w_1 + z_2 w_2) + (-z_1 w_2 + z_2 w_1)i.$$

La $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$. Vi ser at realdelen til $w^* z$ er det samme som skalarproduktet $\mathbf{z}^T \mathbf{w}$. Imaginærdelen til $w^* z$ er det samme som skalarproduktet mellom $\mathbf{z}$ og vektoren $\begin{bmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}$, som er vektoren i andre kvadrant som står ortogonalt på $\mathbf{w}$.

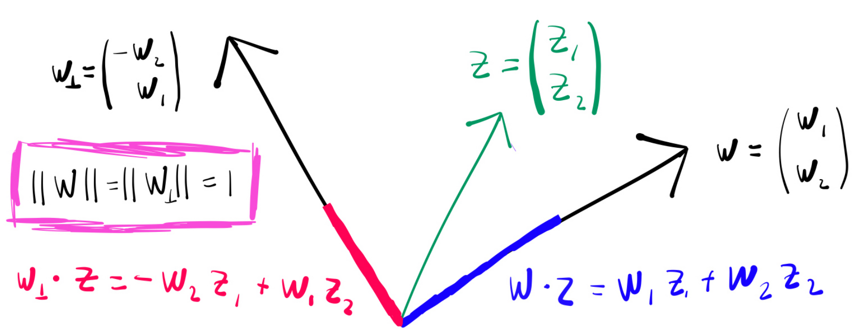
Oppgaven ber oss om å se etter noen artige projeksjoner. Siden $\mathbf{w}$ har lengde 1, er projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}$ gitt ved

$$\frac{\mathbf{z}^T \mathbf{w}}{\mathbf{w}^T \mathbf{w}} \mathbf{w} = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{w}}{||\mathbf{w}||^2} \mathbf{w} = (\mathbf{z}^T \mathbf{w}) \mathbf{w}$$

Altså har projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}$ samme lengde som realdelen til $w^* z$. Tilsvarende er projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}_\perp = \begin{bmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{bmatrix}$ gitt ved

$$\frac{\mathbf{z}^T \mathbf{w}_\perp}{\mathbf{w}_\perp^T \mathbf{w}_\perp} \mathbf{w}_\perp = \frac{\mathbf{z}^T \mathbf{w}_\perp}{||\mathbf{w}_\perp||^2} \mathbf{w}_\perp = (\mathbf{z}^T \mathbf{w}_\perp) \mathbf{w}_\perp$$

Altså har projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}_\perp$ samme lengde som imaginærdelen til $w^* z$. Så hvis vi står i origo og



går lengden $\text{Re}(w^*z)$ i retning $\mathbf{w}$, treffer vi projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}$. Tilsvarende, hvis vi står i origo og går lengden $\text{Im}(w^*z)$ i retning $\mathbf{w}_\perp$, treffer vi projeksjonen av $\mathbf{z}$ på $\mathbf{w}_\perp$.

3) Et eksempel kan være $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} bi \\ bi \end{bmatrix}$ hvor a og b er reelle tall. Da får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{z}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}^*\mathbf{z} &= \begin{bmatrix} a & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} bi \\ bi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -bi & -bi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ a \end{bmatrix} \\ &= abi + abi - abi - abi \\ &= 0.\end{aligned}$$

4) Vi ønsker å vise at dersom $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0$, så er $\mathbf{w}^*\mathbf{z} = 0$.
Ved å bruke at det komplekse indreproduktet er konjugert symmetrisk får vi

$$\mathbf{w}^*\mathbf{z} = \overline{\mathbf{z}^*\mathbf{w}} = \overline{0} = 0.$$

5) Vi har at $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0$. I forrige oppgave viste vi at $\mathbf{z}^*\mathbf{w} = 0 \implies \mathbf{w}^*\mathbf{z} = 0$. Da får vi

$$\begin{aligned}||\mathbf{z} + \mathbf{w}||^2 &= (\mathbf{z} + \mathbf{w})^*(\mathbf{z} + \mathbf{w}) \\ &= \mathbf{z}^*\mathbf{z} + \mathbf{z}^*\mathbf{w} + \mathbf{w}^*\mathbf{z} + \mathbf{w}^*\mathbf{w} \\ &= \mathbf{z}^*\mathbf{z} + \mathbf{w}^*\mathbf{w} \\ &= ||\mathbf{z}||^2 + ||\mathbf{w}||^2.\end{aligned}$$

6) Vi starter med å sjekke om det komplekse skalarproduktet er konjugert symmetrisk.

$$\mathbf{z}^*\mathbf{w} = \overline{\mathbf{z}}^T\mathbf{w} = \mathbf{w}^T\overline{\mathbf{z}} = \overline{\overline{\mathbf{w}}^T\mathbf{z}} = \overline{\mathbf{w}^*\mathbf{z}}.$$

Videre, sjekker vi om det er positivt definitt

$$\mathbf{z}^*\mathbf{z} = \sum_k \overline{z_k}z_k = \sum_k |z_k|^2 > 0 \;\text{ dersom }\; \mathbf{z} \neq 0.$$

Så sjekker vi om det er lineært i andre faktor

$$\mathbf{z}^*(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) = \mathbf{z}^*(a\mathbf{v}) + \mathbf{z}^*(b\mathbf{w}) = a\mathbf{z}^*\mathbf{v} + b\mathbf{z}^*\mathbf{w}$$

Siden det komplekse skalarproduktet oppfyller aksiomene for et komplekst indreprodukt, er det komplekse skalarproduktet et komplekst indreprodukt.

7) Vi starter med å sjekke om det er konjugert symmetrisk

$$(x, y) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{\overline{x(t)}y(t)}\,\mathrm{d}t = \overline{\int_{-\pi}^{\pi} y(t)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t} = \overline{(y, x)}$$

Videre, sjekker vi om det er positivt definitt

$$(x, x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{x(t)}\,\mathrm{d}t = \int_{-\pi}^{\pi} |x(t)|^2\,\mathrm{d}t > 0$$

siden vi integrerer noe som er strengt positivt dersom $x \neq 0$ (altså en funksjon som gir noen ikke-null verdier). Så sjekker vi om det er lineært i første faktor

$$\begin{aligned}
(ax + bz, y) &= \int_{-\pi}^{\pi} (ax(t) + bz(t))\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} (ax(t)\overline{y(t)} + bz(t)\overline{y(t)})\,\mathrm{d}t \\
&= a\int_{-\pi}^{\pi} x(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t + b\int_{-\pi}^{\pi} z(t)\overline{y(t)}\,\mathrm{d}t \\
&= a(x, y) + b(z, y)
\end{aligned}$$

Siden det oppfyller alle aksiomene, er det et indreprodukt.

8) Hvis vi antar at et komplekst indreprodukt er lineært i den første faktoren, kan vi bruke konjugert symmetri til å vise at det er antilineært i den andre faktoren.

$$\begin{aligned}
(\mathbf{z}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w}) &= \overline{(a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, \mathbf{z})} \\
&= \overline{a(\mathbf{v}, \mathbf{z}) + b(\mathbf{w}, \mathbf{z})} \\
&= \overline{a}\,\overline{(\mathbf{v}, \mathbf{z})} + \overline{b}\,\overline{(\mathbf{w}, \mathbf{z})} \\
&= \overline{a}(\mathbf{z}, \mathbf{v}) + \overline{b}(\mathbf{z}, \mathbf{w}).
\end{aligned}$$

9) *Vent litt*

10) La $\mathbf{q}_1$, $\mathbf{q}_2, \ldots, \mathbf{q}_n$ være kolonnene i Q. Siden Q er unitær, er kolonnene ortonormale. Det vil si at

$$\mathbf{q}_i^*\mathbf{q}_j = \begin{cases} 0 & \text{for} \quad i \neq j \\ 1 & \text{for} \quad i = j \end{cases}$$

Radene i Q^* blir de konjugerte av kolonnene i Q. Produktet Q^*Q blir da

$$Q^*Q = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^* \\ \mathbf{q}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{q}_n^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_1^*\mathbf{q}_n \\ \mathbf{q}_2^*\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_2^*\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_2^*\mathbf{q}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{q}_n^*\mathbf{q}_1 & \mathbf{q}_n^*\mathbf{q}_2 & \cdots & \mathbf{q}_n^*\mathbf{q}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} = I$$

Alle elementene i Q^*Q er altså skalarprodukter mellom vektorene $\mathbf{q}_i$. Det er kun langs diagonalen vi får $\mathbf{q}_i$ "skalarproduktet" med seg selv, så det er kun langs diagonalen skalarproduktene ikke blir 0. Siden $Q^*Q = I$ er Q^* inversen til Q, da gjelder også $QQ^* = I$.

For å sjekke om matrisen er unitær, ganger vi den med sin adjungerte og sjekker om vi får I

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4\cdot 1 & 1+i-1-i & 1-1+1-1 & 1-i-1+i \\ 1-i-1+i & 1-i^2+1-i^2 & 1+i-1-i & 1+i^2+1+i^2 \\ 1-1+1-1 & 1-i-1+i & 1+1+1+1 & 1+i-1-i \\ 1+i-1-i & 1+i^2+1+i^2 & 1-i-1+i & 1-i^2+1-i^2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Siden $QQ^* = I$ er matrisen unitær.

11) Matrisen er ikke hermittisk siden $Q \neq Q^*$. Dette er lett å se ettersom Q har ikke-reelle tall langs diagonalen. Hermittiske matriser har *alltid* reelle tall langs diagonalen, ettersom disse tallene ikke "flytter på seg" når matrisen transponeres, så de må være lik sin konjugerte.

12) Siden A er hermittisk, har vi at $A = A^*$. Merk at $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} \in \mathbb{C}$. Alle reelle tall er komplekse tall, og noe som gjelder spesifikt reelle tall i $\mathbb{C}$ er at reelle tall er lik sin konjugerte. For å vise at $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} \in \mathbb{R}$, kan vi altså vise at $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} = (\mathbf{x}^*A\mathbf{x})^*$. Ved å bruke at A er hermittisk, i tillegg til aksiomene for komplekse indreprodukt får vi

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^*A\mathbf{x} &= ((A\mathbf{x})^*\mathbf{x})^* && \text{konjugert symmetrisk}\\ &= (\mathbf{x}^*A^*\mathbf{x})^* && \text{regler for adjungert av produkt}\\ &= (\mathbf{x}^*A\mathbf{x})^* && A \text{ er hermittisk}\end{aligned}$$

Siden $\mathbf{x}^*A\mathbf{x}$ er lik sin konjugerte, har vi at $\mathbf{x}^*A\mathbf{x} \in \mathbb{R}$.

13) La λ være en egenverdi med egenvektor $\mathbf{v}$ til en hermittisk matrise A. Vi ser på $\mathbf{v}^*A\mathbf{v}$ og får

$$\mathbf{v}^*A\mathbf{v} = \mathbf{v}^*\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}^*\mathbf{v} \quad \implies \quad \lambda = \frac{\mathbf{v}^*A\mathbf{v}}{\mathbf{v}^*\mathbf{v}}$$

I forrige oppgave viste vi at $\mathbf{v}^*A\mathbf{v} \in \mathbb{R}$ for en hermittisk matrise A. I tillegg har vi at $\mathbf{v}^*\mathbf{v} = ||\mathbf{v}||^2 \in \mathbb{R}$. Siden både telleren og nevneren i uttrykket for λ er reelle, er dermed også λ reell.

14) La λ_1 og λ_2 være egenverdier med egenvektorer henholdsvis $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$, hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$, til en hermittisk matrise A. Vi ser på uttrykket $\mathbf{v}_1^*A\mathbf{v}_2$

$$\mathbf{v}_1^*A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*\lambda_2\mathbf{v}_2 = \lambda_2\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2$$

Ved å ta utgangspunkt i samme uttrykk, og benytte at A er hermittisk får vi

$$\mathbf{v}_1^*A\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1^*A^*\mathbf{v}_2 = (A\mathbf{v}_1)^*\mathbf{v}_2 = (\lambda_1\mathbf{v}_1)^*\mathbf{v}_2 = \overline{\lambda_1}\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2$$

hvor vi i siste steg har benyttet at $\lambda \in \mathbb{R}$, siden A er hermittisk. Ved å sette de to uttrykkene lik hverandre får vi

$$\lambda_2\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = \lambda_1\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 \implies (\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = 0$$

Siden $\lambda_1 \neq \lambda_2$ er $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, så vi kan dele på $\lambda_2 - \lambda_1$ på begge sider, slik at vi får $\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = 0$. Siden $\mathbf{v}_1^*\mathbf{v}_2 = 0$ er $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ ortogonale.

15) Nå har jeg ikke gjort ting på komponentform, så det blir ganske likt å gjøre det med en generell lineæroperator, men her er uansett utregning

12-2) Vi skal vise at $(x, Tx) \in \mathbb{R}$ for en hermittisk operator T.

$$(x, Tx) = \overline{(Tx, x)} = \overline{(x, Tx)}$$

hvor vi har benyttet at det komplekse indreproduktet er konjugert symmetrisk og definisjonen av en hermittisk operator.

13-2) La λ være en egenverdi til T med normalisert egenvektor x, altså at $Tx = \lambda x$ og $(x, x) = 1$. Vi ønsker å vise at dersom T er hermittisk så er $\lambda \in \mathbb{R}$. Vi ser på uttrykket (x, Tx) og får

$$(x, Tx) = (x, \lambda x) = \lambda(x, x) = \lambda$$

hvor vi har antatt at indreproduktet er lineært i andre faktor. Hvis vi igjen tar utgangspunkt i (x, Tx) og benytter at T er hermittisk får vi

$$(x, Tx) = (Tx, x) = (\lambda x, x) = \overline{\lambda}(x, x) = \overline{\lambda}$$

hvor vi benytter at indreproduktet er antilineært i den første faktoren, siden det er lineært i andre faktor. Vi ser altså at $\lambda = \overline{\lambda}$, så $\lambda \in \mathbb{R}$.

14-2) La λ_1 og λ_2 være egenverdier med egenvektorer henholdsvis x_1 og x_2, hvor $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Vi ønsker å vise at $(x_1, x_2) = 0$. Vi ser på uttrykket (x_1, Tx_2) og får

$$(x_1, Tx_2) = (x_1, \lambda_2 x_2) = \lambda_2(x_1, x_2)$$

Ved å ta utgangspunkt i uttrykket (x_1, Tx_2) på nytt, og utnytte egenskaper for hermittiske operatorer, får vi

$$(x_1, Tx_2) = (Tx_1, x_2) = (\lambda_1 x_1, x_2) = \overline{\lambda_1}(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2)$$

Ved å sette disse to uttrykkene lik hverandre får vi

$$\lambda_2(x_1, x_2) = \lambda_1(x_1, x_2) \implies (\lambda_2 - \lambda_1)(x_1, x_2) = 0$$

Siden $\lambda_2 \neq \lambda_1$ så er $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$, så vi deler på $\lambda_2 - \lambda_1$ og får $(x_1, x_2) = 0$, så x_1 og x_2 er ortogonale.

16) Ved å bruke resultatet som jeg viser i neste oppgave får vi

$$(\mathbf{z}, \mathbf{z}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{c_k} = \sum_{k=1}^{n} |c_k|^2$$

17) Vi har en ortonormal vektormengde $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, som betyr at

$$(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j \\ 1 & \text{for } i = j \end{cases}$$

Vi har vektorer

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{v}_k$$

Indreproduktet $(\mathbf{z}, \mathbf{w})$ blir

$$\begin{aligned}
(\mathbf{z}, \mathbf{w}) &= \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k, \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{v}_k \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\mathbf{v}_j, \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{v}_k \right) && \text{lineært i første faktor} \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} \overline{d_k} \, (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) && \text{antilineært i andre faktor} \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{d_j} \, (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) && (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_k) = 0 \text{ for } k \neq j \\
&= \sum_{j=1}^{n} c_j \overline{d_j} && (\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_j) = 1
\end{aligned}$$

Om vi har j eller k som summe-indeks har ingenting å si, resultatet er hvertfall at

$$(\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d_k}$$