2-2 Reelle fourierrekker LF

Astrid Mysterud, februar 2024

1) Vist i 2-1 LF.

2) Vi starter med $m = n$, da får vi

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin(mx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

Videre benytter vi den trigonometriske identiteten at $\cos(2\theta) = 1 - 2\sin^2(\theta)$ og får

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{1-\cos(2mx)}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x - \frac{1}{2m}\sin(2mx)}{2}\right]_0^\pi \\ &= \frac{\pi - \frac{1}{2m}\sin(2m\pi)}{2} - \frac{0 - \frac{1}{2m}\sin(0)}{2}.\end{aligned}$$

Vi har at $\sin(0) = 0$ og $\sin(2m\pi) = 0$ når $m \in \mathbb{Z}$, dermed blir

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2}\end{aligned}$$

når $m = n$. For $m \neq n$ benytter vi at $\sin(x) = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ og $\cos(x) = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$, og får

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}\cdot\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \frac{e^{i(m+n)x} - e^{i(m-n)x} - e^{-i(m-n)x} + e^{-i(m+n)x}}{4i^2}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\pi \frac{e^{i(m+n)x} + e^{-i(m+n)x} - (e^{i(m-n)x} + e^{-i(m-n)x})}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^\pi \frac{2\cos((m+n)x) - 2\cos((m-n)x)}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{2}\cos((m-n)x) - \frac{1}{2}\cos((m+n)x)\right)\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)x)\right]_0^\pi \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)\pi) - \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)\pi) - \frac{1}{2(m-n)}\sin(0) + \frac{1}{2(m+n)}\sin(0) \\ &= 0,\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $\sin((m-n)\pi) = 0$ og $\sin((m+n)\pi) = 0$, siden $m-n$ og $m+n$ er heltall når m og n er heltall.

3)

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) &= f(x) \qquad / \cdot \sin(mx) \\
\sin(mx) \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) &= f(x) \sin(mx) \\
\int_0^\pi \sum_{n=1}^{N} b_n \sin(nx) \sin(mx)\, \mathrm{d}x &= \int_0^\pi f(x) \sin(mx)\, \mathrm{d}x \\
\sum_{n=1}^{N} b_n \int_0^\pi \sin(nx) \sin(mx)\, \mathrm{d}x &= \int_0^\pi f(x) \sin(mx)\, \mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Ved å benytte resultatet fra forrige oppgave, ser vi at alle ledd på venstresiden forsvinner utenom leddet hvor $n = m$, det gir

$$\begin{aligned}
b_m \cdot \frac{\pi}{2} &= \int_0^\pi f(x) \sin(mx)\, \mathrm{d}x \\
\implies b_m &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(mx)\, \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Så kan vi selvfølgelig bytte begge m-er med n-er slik at

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x.$$

4) Vi ser på funksjonen gitt ved $f(x) = x(\pi - x)$.

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x(\pi - x) \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= 2 \int_0^\pi x \sin(nx)\, \mathrm{d}x - \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x^2 \sin(nx)\, \mathrm{d}x \\
&= 2I_1 - \frac{2}{\pi} I_2
\end{aligned}$$

Vi starter med å se på integralet I_1, og bruker delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \sin(nx)$. Da blir $u' = 1$ og $v = -\frac{1}{n} \cos(nx)$. Da blir

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^\pi x \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 1 \cdot -\frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^\pi \\
&= -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{0}{n}\cos(0) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) - \frac{1}{n^2}\sin(0) \\
&= -\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)
\end{aligned}
$$

For å løse I_2, må vi bruke delvis integrasjon to ganger. Vi starter med å sette $u = x^2$ og $v' = \sin(nx)$, da er $u' = 2x$ og $v = -\frac{1}{n}\cos(nx)$. Som gir

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi 2x \cdot -\frac{1}{n}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\int_0^\pi x\cos(nx)\,\mathrm{d}x.
\end{aligned}
$$

Så bruker vi delvis integrasjon på det siste integralet med $u = x$ og $v' = \cos(nx)$, slik at $u' = 1$ og $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$, da får vi

$$
\begin{aligned}
\int_0^\pi x^2 \sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x\right) \\
&= \left[-\frac{x^2}{n}\cos(nx)\right]_0^\pi + \frac{2}{n}\left(\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi + \left[\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^\pi\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi) + 0 + \frac{2}{n}\left(\frac{\pi}{n}\sin(n\pi) - 0 + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\cos(0)\right) \\
&= -\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^3}
\end{aligned}
$$

Nå som vi har løst I_1 og I_2, putter vi det inn i uttrykket vi fant for b_n og får

$$\begin{aligned}
b_n &= 2I_1 - \frac{2}{\pi}I_2 \\
&= 2\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi^2}{n}\cos(n\pi) + \frac{2}{n^3}\cos(n\pi) - \frac{2}{n^3}\right) \\
&= -\frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{2\pi}{n}\cos(n\pi) - \frac{4}{\pi n^3}\cos(n\pi) + \frac{4}{\pi n^3} \\
&= \frac{4}{\pi n^3} - \frac{4}{\pi n^3}\cos(n\pi) \\
&= \frac{4 - 4\cos(n\pi)}{\pi n^3} \\
&= \frac{4 - 4(-1)^n}{\pi n^3}
\end{aligned}$$

Dette kan vi forenkle videre, fordi

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & \text{når } n \text{ er odd} \\ 0 & \text{når } n \text{ er par.} \end{cases}$$

Dermed trenger vi bare summere over oddetall, siden alle partallsledd blir 0. For å bare summere over oddetall setter vi inn $2n-1$ for n. (Da blir tallene $\{1, 2, 3, \ldots\}$ om til $\{2\cdot 1-1,\ 2\cdot 2-1,\ 2\cdot 3-1, \ldots\} = \{1, 3, 5, \ldots\}$)

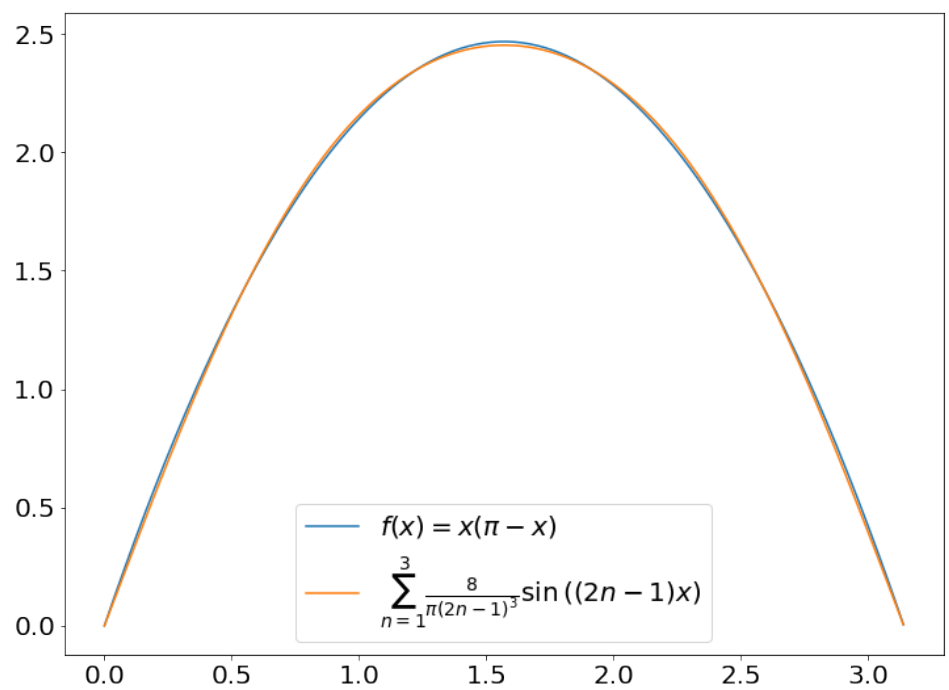
$$x(\pi - x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3}\sin((2n-1)x)$$

Plotte funksjonen og partialsummer:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams.update({'font.size': 20})        # endrer font i plot

N = 3        # antall ledd


def f(x):         # definerer funksjonen
    return x * (np.pi - x)


def b(n):
    return 8 / (np.pi * (2 * n - 1) ** 3)


def f_sum(x):         # funksjonen som returnerer partialsum
    S_N = 0
```

```
    for n in range(1, N):
        S_N += b(n) * np.sin((2 * n - 1) * x)
    return S_N

x = np.arange(0, np.pi, 0.01)

plt.figure(figsize = (12, 9))
plt.plot(x, f(x), label = r'$f(x)=x(\pi-x)$')
plt.plot(x, f_sum(x), label = r'$\sum_{n=1}^3 \frac{8}{\pi (2n-1)^3}\sin{((2n-1)x)}$')
plt.legend()
plt.show()
```

Denne koden gir følgende plot



5) I 2-1 fant vi at problemet $\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t)$, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ har løsningene

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx).$$

Nå legger vi til kravet $u(x,0) = x(\pi - x)$, altså

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^0 \sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx) \\ &= x(\pi - x). \end{aligned}$$

I forrige oppgave fant vi at

$$b_n = \begin{cases} \frac{8}{\pi n^3} & \text{når } n \text{ er odd} \\ 0 & \text{når } n \text{ er par.} \end{cases}$$

Dermed blir

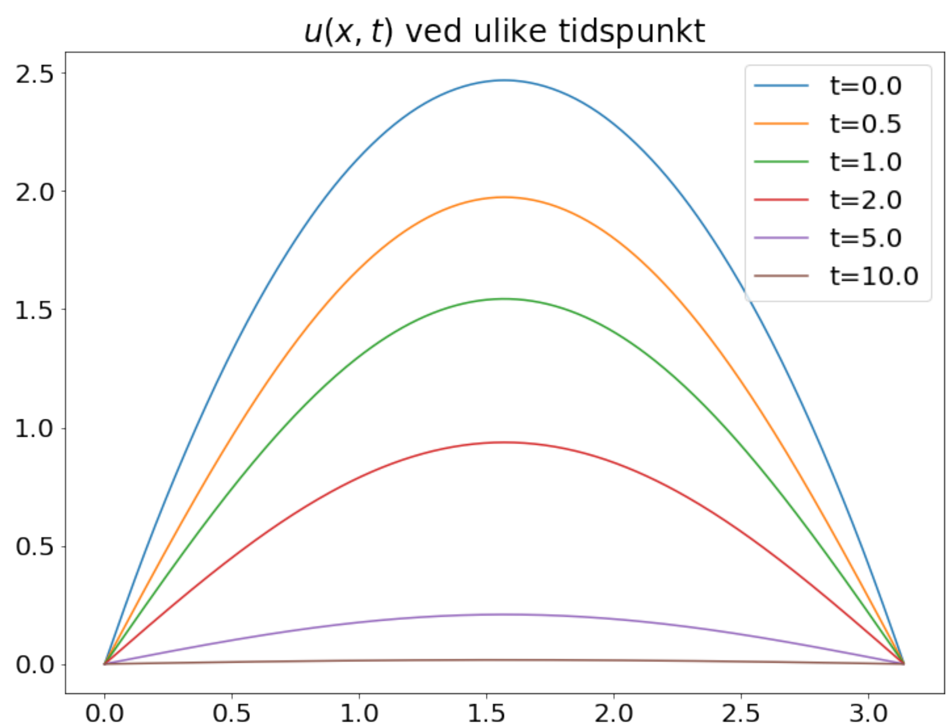
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^3} e^{-\alpha(2n-1)^2 t} \sin((2n-1)x).$$

Her er kode for å plotte funksjonen ved ulike tidspunkt

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
plt.rcParams.update({'font.size': 20})

N = 10          # antall ledd
alpha = 0.5     # velger en alfa

def b(n):
    return 8 / (np.pi * (2 * n - 1) ** 3)

def u(x, t):
    S_N = 0
    for n in range(1, N):
        S_N += b(n) * np.exp(-alpha * t * (2 * n - 1) ** 2) * np.sin((2 * n - 1) * x)
    return S_N
```

```
# velger hvilke tidspunkt vi onsker a se pa
t_array = np.array([0, 0.5, 1, 2, 5, 10])
x = np.arange(0, np.pi, 0.01)

plt.figure(figsize = (12, 9))
for t in t_array:
    plt.plot(x, u(x, t), label = f't={t}')
plt.title(r'$u(x,t)$ ved ulike tidspunkt')
plt.legend()
plt.show()
```

Vi får følgende plot



Vi ser at $u(x,t)$ går mot 0 når tiden går. Det gir mening utifra funksjonsuttrykket. Siden vi har faktoren $e^{-\alpha(2n-1)^2 t}$, ser vi at når t blir stor blir $e^{-\alpha(2n-1)^2 t}$ liten.

6) Kravet $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ tilsvarer at vi "tvinger" temperaturen (eller hva nå enn u er) til å være 0 i endepunktene $x = 0$ og $x = \pi$ ved alle tidspunkt. Hvis stangen er isolert i endepunktene, ønsker vi at u ikke skal endre seg når man "flytter seg" (beveger seg i x-retning) fra endepunktene. Altså krever vi ikke noe av *verdien* til u, men verdien til den *deriverte* i x-retning u'. Vi ønsker ingen endring i u ved endepunktene altså $u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0$.

7) Vi ser etter løsninger på formen $u(x,t) = y(x)z(t)$. Det gjør at varmelikningen er på formen

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \quad \Leftrightarrow \quad y(x)\dot{z}(t) = \alpha y''(x)z(t)$$

Separasjon av variable, med separasjonskonstant k, gir oss da de to ODE-ene

$$\begin{cases} y''(x) - ky(x) = 0 \\ \dot{z}(t) - k\alpha z(t) = 0 \end{cases}$$

Løsningene av disse avhenger av fortegnet til k. Ved å teste $k > 0$ slik som i 2-1, ser vi at dette kun gir den trivielle løsningen. Vi tester dermed $k = 0$. For y får vi da likningen

$$y''(x) = 0$$

som har løsninger

$$y(x) = Cx + D$$

for konstanter C og D. Vi sjekker om noen av disse løsningene oppfyller randkravene $u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0$, altså $y'(0)z(t) = y'(\pi)z(t) = 0$. Ved å derivere u får vi

$$u'(x,t) = y'(x)z(t) = Cz(t)$$

Vi ser at u' har samme verdi i $x = 0$ og $x = \pi$, nemlig $u'(0,t) = u'(\pi,t) = Cz(t)$. Randkravet gir at dette må være lik 0, dermed må $C = 0$. Vi får altså en ikke-triviell løsning for $k = 0$, nemlig $y(x) = D$ for en konstant D. Likningen for z, når $k = 0$, blir

$$\dot{z}(t) = 0$$

altså må z også være en konstant. Siden både y og z er konstanter for $k = 0$, kan vi samle dette i en felles konstant D, slik at $u(x,t) = D$ for $k = 0$. Videre, tester vi $k < 0$ ved å sette $k = -n^2$ hvor $n \in \mathbb{R}$ og $n \neq 0$.

Da blir første likning

$$y''(x) + n^2 y(x) = 0$$

som har løsninger

$$y(x) = A\cos(nx) + B\sin(nx)$$

for konstanter A og B. Vi sjekker om noen av disse løsningene oppfyller randkravene $u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0$, altså $y'(0)z(t) = y'(\pi)z(t) = 0$. Ved å derivere u får vi

$$u'(x,t) = y'(x)z(t) = (-An\sin(nx) + Bn\cos(nx))z(t)$$

Evaluert i 0 får vi

$$u'(0,t) = y'(0)z(t) = (-An\sin(0) + Bn\cos(0))z(t) = Bnz(t) = 0$$

For å ikke få den trivielle løsningen, må $B = 0$. Evaluert i π får vi

$$u'(\pi,t) = y'(\pi)z(t) = -An\sin(n\pi)z(t) = 0$$

Dersom $A = 0$ får vi den trivielle løsningen. Men $n \in \mathbb{Z}$ oppfyller også randkravet. Siden $\sin(-x) = -\sin(x)$ holder det å se på $n \in \mathbb{N}$, så vil fortegnet "gjøres opp for" i konstanten. Vi har altså funnet at $k = -n^2$ hvor $n \in \mathbb{N}$. Likningen for z blir da

$$\dot{z}(t) + n^2\alpha z(t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \dot{z}(t) = -\alpha n^2 z(t)$$

som har løsninger

$$z(t) = Ce^{-\alpha n^2 t}$$

for en konstant C (annen C enn tidligere, hva vi kaller den i utregninger har jo ikke noe å si). u har dermed løsningene

$$u_n(x,t) = y_n(x)z_n(t) = A_n\cos(nx)C_n e^{-\alpha n^2 t} = a_n\cos(nx)e^{-\alpha n^2 t}$$

for $n \in \mathbb{N}$, hvor $a_n = A_nC_n$. I tillegg har vi en løsning

$$u_0(x,t) = D = a_0$$

Vi har altså én løsning for hver $n \in \mathbb{N}_0$. Superposisjonsprinsippet gir da at summen av disse løsningene u_n også vil være en løsning, altså at

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t} \cos(nx)$$

Så legger vi til initialkravet, nemlig at $u(x,0) = f(x)$ for en funksjon f. Ved å evaluere u i $t = 0$ får vi

$$u(x,0) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) = f(x)$$

Vi har altså at

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)$$

Vi ønsker å løse denne likningen for a_0 og a_n. Ved å integrere likningen fra 0 til π, får vi at

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} a_0\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx) \right) \mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= a_0 \int_0^{\pi} \mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x &= a_0(\pi - 0) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot 0 \\
\implies a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $\int_0^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ for $n \in \mathbb{N}$. Videre, ønsker vi å løse for a_n. Vi ganger likningen med $\cos(mx)$ for en gitt indeks $m > 0$ og får

$$f(x)\cos(mx) = a_0 \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx)$$

Videre, integrerer vi fra 0 til π og får

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} a_0 \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx)\cos(mx) \right) \mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= a_0 \int_0^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Igjen benytter vi at $\int_0^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$ for heltall $m > 0$, og at $\int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x$ er 0 for $n \neq m$ og $\frac{\pi}{2}$

for $n = m$. Det er dermed kun et ledd i summen som ikke blir 0, nemlig når $n = m$. Det gir

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= a_m \cdot \frac{\pi}{2} \\
\implies a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Vi har altså funnet at for funksjonen

$$u(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t}\cos(nx)$$

med initialkrav $u(x,0) = f(x)$, må

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

Hvis vi skriver om funksjonen til

$$u(x,t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-\alpha n^2 t}\cos(nx)$$

kan uttrykket for konstantene samles til ett uttrykk siden $\cos(0) = 1$, altså

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

for $n \geq 0$.

8) Vi ønsker å løse von-neumann-problemet med $f(x) = x$. a_n er dermed gitt ved følgende integral

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(nx)\,\mathrm{d}x$$

Dette kan løses med delvis integrasjon med $u = x$ og $v' = \cos(nx)$. Da er $u' = 1$ og $v = \frac{1}{n}\sin(nx)$. Dermed får vi

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{n}\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx)\right]_0^\pi - \frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin(n\pi) - 0\right) - \frac{2}{\pi}\left(-\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(0)\right) \\
&= \frac{2}{\pi n^2}\cos(n\pi) - \frac{2}{\pi n^2} \\
&= \frac{2(-1)^n - 2}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

Vi ser at når n er partall blir $a_n = 0$, mens når n er oddetall får vi $a_n = -\frac{4}{\pi n^2}$. Dermed kan vi bytte n med $2n-1$ slik at vi bare summerer over oddetall. Dette gjelder når $n > 0$. For $n = 0$ får vi integralet

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\cos(0)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{2} - 0\right) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

Altså får vi løsningen

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}e^{-\alpha(2n-1)^2 t}\cos((2n-1)x) \\
&= \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{-\alpha(2n-1)^2 t}}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x)
\end{aligned}$$

9) I oppgave 9 i 2-1 kom vi fram til at problemet $\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t)$ hvor $u(0,t) = u(\pi,t) =$ har løsningene

$$u_n(x,t) = (a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt))\sin(nx)$$

Superposisjonsprinsippet gir da at vi kan legge sammen disse løsningene til løsningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt))\sin(nx).$$

Nå legger vi til initialbetingelsene $u(x,0) = f(x)$ og $\dot{u}(x,0) = g(x)$. Vi ønsker å bruke disse til å finne uttykk for a_n og b_n. Den første initialbetingelsen gir

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(0) + b_n\sin(0))\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx) = f(x)$$

Vi ganger likningen med $\sin(mx)$ på begge sider for et heltall m.

$$f(x)\sin(mx) = \sum_{n=1}^{\infty}a_n\sin(nx)\sin(mx)$$

Videre, integrerer vi fra 0 til π på begge sider

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin(nx)\sin(mx)\right)\mathrm{d}x \\
\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Så benytter vi at $\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x$ er 0 når $n \neq m$ og $\frac{\pi}{2}$ når $n = m$. På høyre side sitter vi altså kun igjen med leddet hvor $n = m$.

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= a_m \cdot \frac{\pi}{2} \\
\implies a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

For å benytte den andre initialbetingelsen starter vi med å derivere u med hensyn på t

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(cnt) + b_n\sin(cnt))\sin(nx)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n cn\sin(nct) + b_n nc\cos(cnt))\sin(nx)
\end{aligned}$$

Så evaluerer vi denne i $t = 0$

$$\dot{u}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n cn\sin(0) + b_n nc\cos(0))\sin(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\sin(nx) = g(x)$$

Tilsvarende som tidligere ganger vi med $\sin(mx)$, integrerer fra 0 til π og benytter ortogonaliteten. Da får vi

$$\begin{aligned}
g(x)\sin(mx) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\sin(nx)\sin(mx) \\
\int_0^\pi g(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\sin(nx)\sin(mx)\right)\mathrm{d}x \\
\int_0^\pi g(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\int_0^\pi \sin(nx)\sin(mx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^\pi g(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x &= b_m mc \cdot \frac{\pi}{2} \\
\implies b_m &= \frac{2}{cm\pi}\int_0^\pi g(x)\sin(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

10) Ved å separere u til å være $u(x,t) = y(x)z(t)$ og benytte separasjon av variable med separasjonskonstant

k får vi følgende ODE-er

$$\begin{cases} \ddot{z}(t) - kc^2 z(t) = 0 \\ y''(x) - ky(x) = 0 \end{cases}$$

Disse har ulike løsninger basert på fortegnet til k. For $k > 0$ får vi kun trivielle løsninger. For $k = 0$ får vi

$$y''(x) = 0 \implies y(x) = Ax + B$$

for konstanter A og B. Randkravene $u'(0,t) = u'(\pi,t) = 0$ gir

$$u'(0,t) = y'(0)z(t) = Az(t) = 0 \implies A = 0$$

For z får vi

$$\ddot{z}(t) = 0 \implies z(t) = Ct + D$$

for konstanter C og D. For $k = 0$ blir u altså

$$u_0 = y(x)z(t) = B(Ct + D) = b_0 t + a_0$$

hvor vi har samlet konstantene i $b_0 = BC$ og $a_0 = BD$. Videre, ser vi på $k < 0$. Vi setter $k = -n^2$ for en $n \in \mathbb{R}$ hvor $n \neq 0$.

$$y''(x) + n^2 y(x) = 0 \implies y(x) = A\cos(nx) + B\sin(nx)$$

for konstanter A og B (andre konstanter enn tidligere såklart). For å benytte randkravene, deriverer vi u med hensyn på x

$$u'(x,t) = y'(x)z(t) = (-An\sin(nx) + Bn\cos(nx))z(t)$$

evaluert i $x = 0$ blir dette

$$u'(0,t) = y'(0)z(t) = (-An\sin(0) + Bn\cos(0))z(t) = Bnz(t) = 0$$

For at $Bnz(t) = 0$ må $B = 0$ for at vi skal unngå den trivielle løsningen. Evaluert i $x = \pi$ får vi

$$u'(\pi,t) = y'(\pi)z(t) = -An\sin(n\pi)z(t) = 0$$

Vi har at $\sin(n\pi) = 0$ når n er heltall. Dermed kan $-An\sin(n\pi)z(t)$ være lik 0 når n er heltall, slik at vi unngår den trivielle løsningen hvor enten A eller z er 0. Dermed må n være heltall, og vi kan videre snevre det ned til at $n \in \mathbb{N}$, siden $\sin(-x) = -\sin(x)$ og vi kan bake inn fortegnet i konstanter. For z får vi

$$\ddot{z}(t) + n^2c^2z(t) = 0 \implies z(t) = C\cos(nct) + D\sin(nct)$$

For $k < 0$ får vi altså løsningene

$$u_n(x,t) = A_n\cos(nx)(C_n\cos(nct) + D_n\sin(nct)) = (a_n\cos(nct) + b_n\sin(nct))\cos(nx)$$

for alle $n \in \mathbb{N}$ hvor vi har samlet konstantene til $a_n = A_nC_n$ og $b_n = A_nD_n$. Vi har dermed løsninger for alle $n \in \mathbb{N}_0 = \{0,\, 1,\, 2, \ldots\}$. Ved å benytte superposisjonsprinsippet får vi den totale løsningen

$$u(x,t) = a_0 + b_0t + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nct) + b_n\sin(nct))\cos(nx)$$

Nå ønsker vi å benytte initialkravene til å finne konstantene a_0, b_0, a_n og b_n. Vi starter å bruke initialbetingelsen $u(x,0) = f(x)$. Ved å evaluere u i $t = 0$ får vi

$$u(x,0) = a_0 + b_0\cdot 0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(0) + b_n\sin(0))\cos(nx) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) = f(x)$$

Ved å integrere likningen fra 0 til π får vi

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx)\right)\mathrm{d}x \\
\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^\pi a_0\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x &= a_0(\pi - 0) + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cdot 0 \\
\implies a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at $\int_0^\pi \cos(nx)\,\mathrm{d}x = 0$ når n er heltall.
Videre, ganger vi likningen $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx) = f(x)$ med $\cos(mx)$ på begge sider, og integrerer fra 0

til π

$$
\begin{aligned}
f(x)\cos(mx) &= a_0\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\cos(mx) \\
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\left(a_0\cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos(nx)\cos(mx)\right)\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= a_0\int_0^{\pi}\cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\int_0^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= a_0\cdot 0 + a_m\cdot\frac{\pi}{2} \\
\implies a_m &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Hvor vi igjen har benyttet at $\int_0^{\pi}\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$ når m er heltall og $\int_0^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = 0$ når $n \neq m$ og $\int_0^{\pi}\cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$ når $n = m$. Nå ønsker vi å bruke initialkravet $\dot{u}(x,0) = g(x)$, og starter dermed med å derivere u med hensyn på t

$$
\dot{u}(x,t) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n nc\sin(nct) + b_n nc\cos(nct))\cos(nx)
$$

Vi evaluerer dette i $t = 0$ og får

$$
\dot{u}(x,0) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(-a_n nc\sin(0) + b_n nc\cos(0))\cos(nx) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\cos(nx) = g(x)
$$

Ved å integrere denne likningen fra 0 til π får vi

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi}\left(b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\cos(nx)\right)\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} b_0\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\int_0^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x &= b_0(\pi - 0) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc\cdot 0 \\
\implies b_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

Så ganger vi $b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc \cos(nx) = g(x)$ med $\cos(mx)$ og integrerer fra 0 til π

$$\begin{aligned}
g(x)\cos(mx) &= b_0 \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc \cos(nx)\cos(mx) \\
\int_0^{\pi} g(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \left(b_0 \cos(mx) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc \cos(nx)\cos(mx) \right) \mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} g(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= b_0 \int_0^{\pi} \cos(mx)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n nc \int_0^{\pi} \cos(nx)\cos(mx)\,\mathrm{d}x \\
\int_0^{\pi} g(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x &= b_0 \cdot 0 + b_m mc \cdot \frac{\pi}{2} \\
\implies b_m &= \frac{2}{cm\pi} \int_0^{\pi} g(x)\cos(mx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Vi har altså funnet at

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
a_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
b_0 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} g(x)\,\mathrm{d}x \\
b_n &= \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

til løsningen

$$u(x,t) = a_0 + b_0 t + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct))\cos(nx).$$

Hvis vi bruker uttrykket for a_n med $n = 0$ får vi 2 ganger det vi får fra uttrykket for a_0. Derfor står det $\frac{a_0}{2}$ i oppgaven. For b_0 må vi ha et eget uttykk for å unngå å dele på 0.

11) Det første integralet regnet vi ut i oppgave 2, men med andre grenser. Vi tar nå samme integral med andre grenser. For $n = m$ får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(mx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x - \frac{1}{2m}\sin(2mx)}{2} \right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= \frac{\pi - \frac{1}{2m}\sin(2m\pi)}{2} - \frac{-\pi - \frac{1}{2m}\sin(-2m\pi)}{2} \\
&= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

For $n \neq m$ får vi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)x) - \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)\pi) - \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)\pi) \\ &- \left(\frac{1}{2(m-n)}\sin(-(m-n)\pi) - \frac{1}{2(m+n)}\sin(-(m+n)\pi)\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

alle ledd blir 0, siden $\sin(k\pi) = 0$ for $k \in \mathbb{Z}$.

Så tar vi for oss neste integral. For $n = m$ får vi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(mx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos(2mx)+1}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\frac{1}{2m}\sin(2mx)+x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{\frac{1}{2m}\sin(2m\pi)+\pi}{2} - \frac{\frac{1}{2m}\sin(-2m\pi)-\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} \\ &= \pi\end{aligned}$$

For $n \neq m$ får vi

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}+e^{-imx}}{2}\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(m+n)x}+e^{-i(m+n)x}+e^{i(m-n)x}+e^{-i(m-n)x}}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2\cos((m+n)x)+2\cos((m-n)x)}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)x) + \frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1}{2(m+n)}\sin((m+n)\pi) + \frac{1}{2(m-n)}\sin((m-n)\pi) \\ &- \frac{1}{2(m+n)}\sin(-(m+n)\pi) - \frac{1}{2(m-n)}\sin(-(m-n)\pi) \\ &= 0\end{aligned}$$

Alle ledd blir 0, samme grunn som tidligere.

Så, siste integral blir 0, siden vi integrerer produktet av en odd og en jevn funksjon, som da blir en odd funksjon. Når vi integrerer en odd funksjon fra $-\pi$ til π så blir dette 0. Her er uansett utregning for $m \neq n$.

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\cos(nx)\,\mathrm{d}x &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{imx}-e^{-imx}}{2i}\cdot\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i(m+n)x}-e^{-i(m+n)x}+e^{i(m-n)x}-e^{-i(m-n)x}}{4i}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{2i\sin((m+n)x)+2i\sin((m-n)x)}{4i}\,\mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)x)-\frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)x)\right]_{-\pi}^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)\pi)-\frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)\pi) \\
&+\frac{1}{2(m+n)}\cos((m+n)\pi)+\frac{1}{2(m-n)}\cos((m-n)\pi) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

hvor vi i siste steg har benyttet av cosinus er en jevn funksjon.

12) Vi ønsker å finne koeffisientene i

$$f(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))$$

Vi starter med a_0, ved å integrere likningen fra $-\pi$ til π får vi

$$
\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)+b_n\sin(nt))\right)\mathrm{d}t \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\,\mathrm{d}t + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\,\mathrm{d}t\right) \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t &= a_0(\pi+\pi) + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cdot 0 + b_n\cdot 0) \\
\implies a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

Så løser vi for a_n ved å gange likningen med $\cos(mt)$ for en indeks m og integrere fra $-\pi$ til π, da får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\cos(mt)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)\cos(mt) + b_n\sin(nt)\cos(mt))\right)\mathrm{d}t \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,\mathrm{d}t &= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\cos(mt)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\cos(mt)\,\mathrm{d}t\right) \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,\mathrm{d}t &= a_0\cdot 0 + a_m\cdot\pi + b_m\cdot 0 \\
\implies a_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(mt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

Så løser vi for b_n ved å gange likningen med $\sin(mt)$ for en indeks m og integrere fra $-\pi$ til π, da får vi

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,\mathrm{d}t &= \int_{-\pi}^{\pi} a_0\sin(mt)\,\mathrm{d}t + \int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nt)\sin(mt) + b_n\sin(nt)\sin(mt))\right)\mathrm{d}t \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,\mathrm{d}t &= a_0\int_{-\pi}^{\pi}\sin(mt)\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)\sin(mt)\,\mathrm{d}t + b_n\int_{-\pi}^{\pi}\sin(nt)\sin(mt)\,\mathrm{d}t\right) \\
\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,\mathrm{d}t &= a_0\cdot 0 + a_m\cdot 0 + b_m\cdot\pi \\
\implies b_m &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(mt)\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

13) Siden vi har en funksjon med delt forskrift, må vi dele opp integralet etter funksjonen. Fra $-\pi$ til 0 er funksjonen 0, så disse integralene blir 0. Vi setter i gang med å regne ut koeffisienter

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2\pi}(\pi - 0) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

a_n blir

$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\sin(0)\right) \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n}\sin(n\pi) - \frac{1}{n}\sin(0)\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

mens b_n blir

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} \sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n}\cos(0)\right) \\
&= \frac{1-\cos(n\pi)}{n\pi} \\
&= \frac{1-(-1)^n}{n\pi}
\end{aligned}
$$

for partalls n blir denne 0, mens for oddetalls n blir den $b_n = \frac{2}{n\pi}$. Dermed bytter vi n-er med $2n-1$, slik at vi kun summerer over oddetall. Fourierrekken blir dermed

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n-1}\sin((2n-1)x)
\end{aligned}
$$

14) $f(x) = x$ er en odd funksjon, så både a_0 og a_n blir 0. Vi trenger dermed kun å regne ut b_n, som blir

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
$$

her er integranden produktet av to odde funksjoner, som da blir en jevn funksjon, dermed kan vi gange med

2 og endre på grensene. Dette integralet løste vi i oppgave 4 med delvis integrasjon. Jeg hopper dermed over utregningen og setter inn grenser:

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\int_0^\pi x\sin(nx)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{2}{\pi}\left[-\frac{x}{n}\cos(nx) + \frac{1}{n^2}\sin(nx)\right]_0^\pi \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi) + \frac{1}{n^2}\sin(n\pi) + \frac{0}{n}\cos(0) - \frac{1}{n^2}\sin(0)\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos(n\pi)\right) \\
&= -\frac{2\cos(n\pi)}{n} \\
&= \frac{2(-1)^{n+1}}{n}
\end{aligned}$$

Dermed blir fourierrekken

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\
&= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\sin(nx)
\end{aligned}$$

15) Trekantfunksjonen er en jevn funksjon. Dermed er $b_n = 0$. Vi starter med å regne ut a_0

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

hvor vi har benyttet at f er jevn.

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\pi}\int_0^\pi (\pi - x)\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{\pi}\left[\pi x - \frac{x^2}{2}\right]_0^\pi \\
&= \frac{1}{\pi}\left(\pi^2 - \frac{\pi^2}{2}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}
\end{aligned}$$

Videre, regner vi ut a_n

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

hvor vi har benyttet av $f(x)\cos(nx)$ er jevn siden f og $\cos(nx)$ er jevne.

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} (\pi - x)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{0}^{\pi} \cos(nx)\,\mathrm{d}x - \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} x\cos(nx)\,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

det siste integralet regnet vi ut med delvis integrasjon i oppgave 4, så jeg hopper over utregning og får

$$\begin{aligned} &= 2\left[\frac{1}{n}\sin(nx)\right]_0^{\pi} - \frac{2}{\pi}\left[\frac{x}{n}\sin(nx) + \frac{1}{n^2}\cos(nx)\right]_0^{\pi} \\ &= 2\left(\frac{1}{n}\sin(n\pi) - \sin(0)\right) - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{n}\sin(n\pi) + \frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - 0 - \frac{1}{n^2}\cos(0)\right) \\ &= -\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n^2}\cos(n\pi) - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= \frac{2 - 2(-1)^n}{\pi n^2} \end{aligned}$$

vi ser at a_n er 0 for partalls n og $\frac{4}{\pi n^2}$ for oddetalls n. Dermed bytter vi n med $2n-1$ og får

$$\begin{aligned} f(x) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx)) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}\cos((2n-1)x) \end{aligned}$$

16) Fourierrekka til enhetssprangfunksjonen konvergerer ikke til $f(x)$ i origo. Her er jo enhetssprangfunksjonen diskontinuerlig, mens fourierrekken er kontinuerlig. Fourierrekken er 2π-periodisk, mens funksjonen ikke er det. Så fourierrekken konvergerer heller ikke til $f(x)$ til $x = -\pi$ og $x = \pi$. Fourierrekka til $f(x) = x$ er 2π-periodisk, mens funksjonen ikke er det. Dermed konvergerer ikke fourierrekka mot $f(x)$ i $x = -\pi$ og $x = \pi$. Tilsvarende, vil fourierrekka til trekantfunksjonen ikke konvergere mot $f(x)$ i $x = -\pi$ og $x = \pi$.

17) La f og g være jevne funksjoner, og h være funksjonen $h = fg$. Da får vi at

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = h(x)$$

siden f og g er jevne. Altså er $h(-x) = h(x)$, h er dermed jevn.

La f og g være odde funksjoner, og h være funksjonen $h = fg$. Da får vi at

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = (-f(x))(-g(x)) = (-1)^2 f(x)g(x) = f(x)g(x) = h(x)$$

siden f og g er odde. Altså er $h(-x) = h(x)$, h er dermed jevn.

La f være jevn, g odd, og $h = fg$. Da får vi at

$$h(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)(-g(x)) = -f(x)g(x) = -h(x)$$

siden f er jevn og g er odd. Altså er $h(-x) = -h(x)$, h er dermed odd.

18)

I oppgave 14: Her er f odd. Dermed blir $a_0 = 0$, siden vi integrerer funksjonen fra $-\pi$ til π. a_n blir også 0, siden vi integrerer produktet av en odd og en jevn funksjon, som da blir en odd funksjon. b_n blir ikke 0 og er koeffisienten foran sinusene, og vi trenger dermed bare sinuser.

I oppgave 15: Her er f jevn. a_0 og a_n blir ikke 0. b_n blir 0, siden vi integrerer produktet av en odd og en jevn funksjon, som da blir en odd funksjon, fra $-\pi$ til π. Siden $a_n \neq 0$ er koeffisienten foran cosinus trenger vi bare cosinuser.

I oppgave 13: Her er f hverken odd eller jevn. Men om vi hadde trukket $\frac{1}{2}$ fra funksjonen, hadde den vært odd. Så hvis vi hadde funnet fourierrekka til denne "odde enhetssprangfunksjonen" (som da er $-\frac{1}{2}$ for negative x og $\frac{1}{2}$ for positive x), ville vi bare trengt sinuser (siden fourierrekken til odde funksjoner kun har sinuser). For å så skifte tilbake til den faktiske enhetssprangfunksjonen, trenger vi bare legge til $\frac{1}{2}$, som da er a_0.