2-1 Bølge- og varmelikningen LF

Astrid Mysterud, januar 2024

Oppgave 1 er å lese i boka, 2-4 står i øvingen.

5) Vi ønsker å vise at dersom $u(x,t) = y(x)z(t)$, så er $\dot{u}(x,t) = y(x)\dot{z}(t)$ og $u'(x,t) = y'(x)z(t)$. Definisjonen av partiellderivasjon sier at

$$\dot{u}(x,t) = \lim_{h\to 0} \frac{u(x,t+h) - u(x,t)}{h}.$$

Videre, benytter vi antagelsen at $u(x,t) = y(x)z(t)$ og at y ikke avhenger av t og dermed kan behandles som en konstant under derivasjon med hensyn på t.

$$\begin{aligned}
\dot{u}(x,t) &= \lim_{h\to 0} \frac{y(x)z(t+h) - y(x)z(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y(x)\left(z(t+h) - z(t)\right)}{h} \\
&= y(x) \lim_{h\to 0} \frac{z(t+h) - z(t)}{h} \\
&= y(x)\dot{z}(t)
\end{aligned}$$

Tilsvarende har vi at

$$\begin{aligned}
u'(x,y) &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x+h,t) - u(x,t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h)z(t) - y(x)z(t)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{z(t)\left(y(x+h) - y(x)\right)}{h} \\
&= z(t) \lim_{h\to 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h} \\
&= z(t)y'(x) \\
&= y'(x)z(t).
\end{aligned}$$

6) Vi starter med randverdiproblemet for varmelikningen gitt ved $\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t)$ hvor $u(0,t) = 0$ og $u(\pi,t) = 0$. Randkravene sier at temperaturen i $x = 0$ og $x = \pi$ holdes konstant til 0 ved alle tidspunkt t.

Ved å bruke separasjon av variable, nemlig antagelsen at $u(x,t) = y(x)z(t)$, gir varmelikningen at

$$\dot{u}(x,t) = \alpha u''(x,t) \implies y(x)\dot{z}(t) = \alpha y''(x)z(t).$$

Ved å dele det siste uttrykket på $\alpha y(x)z(t)$ på begge sider, får vi

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)}.$$

Vi ser at venstre og høyre side avhenger av hver sin variabel, henholdsvis t og x. For at dette skal gjelde for alle t og alle x, må uttrykkene være lik en felles konstant k. Da får vi at

$$\frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k.$$

Dette kan vi dele opp til de to følgende ODE-ene

$$\begin{cases} \frac{\dot{z}(t)}{\alpha z(t)} = k \iff \dot{z}(t) - k\alpha z(t) = 0 \\ \frac{y''(x)}{y(x)} = k \iff y''(x) - ky(x) = 0. \end{cases}$$

Ved å benytte separasjon av variable på randkravene får vi

$$u(0,t) = 0 \implies y(0)z(t) = 0 \quad \text{og} \quad u(\pi,t) = y(\pi)z(t) = 0.$$

For at produktene $y(0)z(t)$ og $y(\pi)z(t)$ skal være 0, må en av faktorene være 0. Vi ser bort i fra den trivielle løsningen $z(t) = 0$ (siden det gir $u(x,t) = 0$ for alle x og t), dermed får vi at $y(0) = 0$ og $y(\pi) = 0$. Altså ender vi opp med randverdiproblemet

$$y''(x) - ky(x) = 0 \quad \text{hvor} \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

Tilsvarende, får vi følgende ved å putte $u(x,t) = y(x)z(t)$ inn i bølgelikningen

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t) \implies y(x)\ddot{z}(t) = c^2 y''(x)z(t).$$

Vi deler på $c^2 y(x)z(t)$ og får

$$\frac{\ddot{z}(t)}{c^2 z(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)} = k,$$

hvor vi ved samme argument som tidligere får at begge sider er lik en felles separasjonskonstant k. Dermed får vi følgende ODE-er

$$\begin{cases} \frac{\ddot{z}(t)}{c^2 z(t)} = k \implies \ddot{z}(t) - kc^2 z(t) = 0 \\ \frac{y''(x)}{y(x)} = k \implies y''(x) - ky(x) = 0 \end{cases}$$

Ved å benytte separasjon av variable på randkravene får vi

$$u(0,t) = 0 \implies y(0)z(t) = 0 \quad \text{og} \quad u(\pi,t) = y(\pi)z(t) = 0.$$

Vi ser bort ifra den trivielle løsningen $z(t) = 0$, og ender opp med randverdiproblemet

$$y''(x) - ky(x) = 0 \quad \text{hvor} \quad y(0) = y(\pi) = 0.$$

7) Vi starter med å teste $k > 0$. Når k er positiv, kan vi skrive $k = n^2$ for $n \in \mathbb{R}$ hvor $n \neq 0$. Vi gjør dette for å "forsikre" oss om at $k > 0$, siden $k = n^2 > 0$ for alle $n \in \mathbb{R}$ hvor $n \neq 0$. (Merk at n *ikke* er et heltall) Da har vi

$$y''(x) - ky(x) = 0 \implies y''(x) - n^2 y(x) = 0,$$

som har løsningene

$$y(x) = Ae^{nx} + Be^{-nx}$$

for konstanter A og B. For å finne konstantene, benytter vi randkravene

$$y(0) = Ae^0 + Be^0 = A + B = 0 \implies A = -B.$$

I $x = \pi$ får vi

$$y(\pi) = Ae^{n\pi} - Ae^{-n\pi} = A(e^{n\pi} - e^{-n\pi}) = 0,$$

som gir at $A = 0$ og dermed $B = 0$. Altså får vi kun den trivielle løsningen for $k > 0$. Videre, tester vi $k = 0$. Det gir

$$y''(x) - ky(x) = 0 \implies y''(x) = 0,$$

som har løsningene

$$y(x) = Ax + B$$

for konstanter A og B. Vi løser for konstantene ved å benytte randkravene

$$y(0) = A \cdot 0 + B = B = 0.$$

Og

$$y(\pi) = A\pi = 0 \implies A = 0.$$

Altså får vi kun den trivielle løsningen for $k = 0$. Til slutt sjekker vi da $k < 0$. Vi setter $k = -n^2$ for $n \in \mathbb{R}$ hvor $n \neq 0$, siden $k = -n^2 < 0$ for alle reelle tall $n \neq 0$. Da får vi

$$y''(x) - ky(x) = 0 \implies y''(x) + n^2 y(x) = 0,$$

som har løsningene

$$y(x) = A\cos nx + B\sin nx$$

for konstanter A og B. Vi benytter randkravene for å løse for konstantene

$$y(0) = A\cos 0 + B\sin 0 = A = 0.$$

Og

$$y(\pi) = B \sin n\pi = 0.$$

Vi ser at $B = 0$ er en løsning, men dette vil igjen gi oss den trivielle løsningen $y(x) = 0$ for alle x. Men $y(\pi) = B \sin n\pi = 0$ når $n \in \mathbb{Z}$. Dermed får vi ikke-trivielle løsninger når $n \in \mathbb{Z}$ (men $n \neq 0$, siden vi ser på $k = -n^2 < 0$). Siden $\sin(-nx) = -\sin(nx)$, kan vi flytte ting inn i konstanter og dermed kun se på $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$.

Dermed gir $k = -n^2 < 0$ at vi får løsninger for alle $n \in \mathbb{N}$. Vi får altså løsningene

$$y_n(x) = B_n \sin(nx) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}.$$

8) I oppgave 6 fant vi at ved å bruke separasjon av variable $u(x,t) = y(x)z(t)$, ender med randverdiproblemet $y''(x) - ky(x) = 0$ hvor $y(0) = y(\pi) = 0$. I oppgave 7 fant vi at dette kun har ikke-trivielle løsninger når $k = -n^2$ hvor $n \in \mathbb{N}$. Siden vi har samme k for de to ODE-ene vi fant, gjelder følgende for funksjonen z

$$\dot{z}(t) - k\alpha z(t) = 0 \implies \dot{z}(t) + n^2 \alpha z(t) = 0.$$

Siden dette gjelder for alle $n \in \mathbb{N}$, får vi ulike ODE-er, og dermed ulike funksjoner z_n, for alle $n \in \mathbb{N}$. Altså

$$\dot{z}_n(t) + \alpha n^2 z_n(t) = 0,$$

som har løsningene $z_n(t) = A_n e^{-\alpha n^2 t}$. Dermed blir løsningen av varmelikningen

$$\begin{aligned} u_n(x,t) &= y_n(x) z_n(t) = B_n \sin(nx) \cdot A_n e^{-\alpha n^2 t} \\ &= b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin(nx) \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

hvor vi har samlet konstantene i en felles konstant b_n.

9) Som følge av oppgave 6 og 7, vil bølgelikningen også kun ha ikke-trivielle løsninger for $k = -n^2 < 0$ hvor $n \in \mathbb{N}$. Dermed blir ODE-en for z

$$\ddot{z}(t) - kc^2 z(t) = 0 \implies \ddot{z}(t) + n^2 c^2 z(t) = 0.$$

Igjen, siden vi får ulike ODE-er, og dermed løsninger, for alle $n \in \mathbb{N}$, skriver vi

$$\ddot{z}_n(t) + n^2c^2z_n(t) = 0,$$

som har løsningene

$$z_n(t) = A_n \cos{(nct)} + C_n \sin{(nct)}.$$

Dermed har bølgelikningen løsningene

$$\begin{aligned} u_n(x,t) = y_n(x)z_n(t) &= B_n \sin{(nx)} \cdot (A_n \cos{(nct)} + C_n \sin{(nct)}) \\ &= (a_n \cos{(cnt)} + b_n \sin{(cnt)}) \sin{(nx)}, \end{aligned}$$

hvor vi har samlet konstantene i a_n og b_n.

10) Vi ønsker å legge til initialkravet $u(x,0) = f(x)$ for varmelikningen. Vi fant løsningene $u_n(x,t) = b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin{(nx)}$. Ved superposisjonsprinsippet er da

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 t} \sin{(nx)} \end{aligned}$$

også en løsning, som da inneholder alle løsningene $u_n(x,t)$. Initialkravet gir da

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\alpha n^2 \cdot 0} \sin{(nx)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin{(nx)} \\ &= f(x), \end{aligned}$$

altså må

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin{(nx)}.$$

Legger kanskje til ukens nøtter etterhvert:)