Komplekse indreproduktrom

Oppgave 1

La z og w være komplekse tall, med $|w| = 1$. Tegn dem inn i det komplekse planet, skriv det komplekse tallet

$$w^* z$$

på kartesisk form, og se nøye på resultatet. Ser du noen artige projeksjoner?

Oppgave 2

Vis at dersom A er hermittisk, er $\mathbf{x}^* A\mathbf{x}$ reell.

Oppgave 3

Vis at en hermittisk matrise har reelle egenverdier.

Oppgave 4

Vis at egenvektorene til to distinkte egenverdier er ortogonale for hermittiske matriser.

Oppgave 5

Vis at dersom $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ er en ortonormal vektormengde og

$$\mathbf{z} = \sum_{k=1}^{n} c_k \mathbf{v}_k \qquad \text{og} \qquad \mathbf{w} = \sum_{k=1}^{n} d_k \mathbf{v}_k, \qquad \text{så er} \qquad (\mathbf{z}, \mathbf{w}) = \sum_{k=1}^{n} c_k \overline{d_k}.$$

Hvis tid

La U være en unitær matrise.

- Vis at $||U\mathbf{z}|| = ||\mathbf{z}||$, altså at U bevarer norm.
- Vis at $(U\mathbf{z}, U\mathbf{w}) = (\mathbf{z}, \mathbf{w})$, altså at U bevarer indreprodukt.
- Vis at $|\det(U)| = 1$.