LTI-systemer II

Oppgave 1

Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 + x_3 \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + x_3 \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 \end{cases}$$

Oppgave 2

Løs differensiallikningssystemet

$$\begin{cases} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 &= \qquad x_2 + 2x_3 \\ \dot{x}_3 &= \qquad\qquad 3x_3 \end{cases}$$

Oppgave 3

Gitt et initialverdiproblem på formen $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x}$ hvor $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

a) Vis at Eulers eksplisitte metode for systemet er gitt ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I + hA)\mathbf{x}_k.$$

b) Vis at Eulers implisitte metode for systemet er gitt ved

$$\mathbf{x}_{k+1} = (I - hA)^{-1}\mathbf{x}_k.$$

Jordandekomposisjon *litt vel detaljert, men til de som lurer*

Vi ønsker J og V slik at $A = VJV^{-1}$ for en $n \times n$-matrise A.

Dersom A har n lineært uavhengige egenvektorer er vi good - Jordandekomposisjonen blir vanlig diagonalisering med egenverdier langs diagonalen i J, og tilhørende egenvektorer som kolonner i V.

Matrisen V: Kolonnene i V er *generaliserte egenvektorer* for matrisen A.

Matrisen J: Egenverdier langs diagonalen og 1-tall på superdiagonalen over egenverdier som "tilhører" en generalisert egenvektor (som ikke er en "vanlig" egenvektor).

Superdiagonal: diagonalen *over* miderste diagonal.

Sammenheng mellom V og J

Dersom det er en "vanlig" egenvektor i kolonne nummer p i matrisen V, er den kun tilhørende egenverdi i kolonne nummer p i J. Dersom det er en generalisert egenvektor i kolonne nummer p i V, vil det være et 1-tall over tilhørende egenverdi i kolonne nummer p i J.

Generaliserte egenvektorer

En generalisert egenvektor $\mathbf{v}$ oppfyller $(A - \lambda I)^k \mathbf{v} = \mathbf{0}$ for en egenverdi λ til A og et heltall k. For å finne kolonnene i V er vi ute etter generaliserte egenvektorer som oppfyller følgende:
Anta at vi har funnet en egenvektor $\mathbf{v}_1$ med egenverdi λ. Vi er ute etter generaliserte egenvektorer $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ... som er slik at

$$
\begin{gathered}
(A - \lambda I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \\
(A - \lambda I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 \\
\vdots
\end{gathered}
$$

$\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$, ... kalles en *kjede av generaliserte egenvektorer*. Hver slik *kjede* tilhører hver sin Jordan-blokk J_k som nevnes i 2-8.

Hvordan finne jordandekomposisjon $A = VJV^{-1}$

1. Finn egenverdiene til A.
2. Finn tilhørende egenvektorer.
3. For hver egenverdi λ_i: sjekk om (multiplisiteten til λ_i) $>$ (antall egenvektorer til λ_i)
   - Hvis ja: finn generaliserte egenvektorer til λ_i.

4. Når man totalt har n lineært uavhengige generaliserte egenvektorer til A putter vi disse inn som kolonner i V.

5. Plassér egenverdiene langs diagonalen til J med 1-tall "over" egenverdiene som tilhører generaliserte egenvektorer (som ikke også er vanlige egenvektorer).

Eksempel. La oss finne jordanformen til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

1. Vi starter med å finne egenverdiene til A ved å løse $\det(A - \lambda I) = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 & -3 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2(-1-\lambda) = 0$$

$$\implies \lambda_1 = -1 \quad \text{med multiplisitet 1, og} \quad \lambda_2 = 2 \quad \text{med multiplisitet 2}$$

2. Finne tilhørende egenvektorer. For $\lambda_1 = -1$ løser vi $(A + I)\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$, og får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

For $\lambda_2 = 2$ løser vi $(A - 2I)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, og får

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

3. $\lambda_1 = -1$ har multiplisitet 1 og har 1 egenvektor, så vi trenger ikke lete etter noen generaliserte egenvektorer som tilhører λ_1. $\lambda_2 = 2$ har multiplisitet 2, men kun 1 egenvektor. Siden $2 > 1$, må vi finne en generalisert egenvektor $\mathbf{v}_3$ som oppfyller $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$. Dermed løser vi $(A - \lambda_2 I)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ med hensyn på $\mathbf{v}_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 4 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \implies \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} s \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

4. Vi velger $s = 0$ for $\mathbf{v}_3$ slik at matrisen V blir

$$V = \left[\begin{array}{c|c|c} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Så finner vi V^{-1}

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

altså er

$$V^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

5. J-matrisen har egenverdiene langs diagonalen. Siden $\mathbf{v}_1$ (første kolonne i V) tilhører λ_1, plasserer vi $\lambda_1 = -1$ i første kolonne. Siden $\mathbf{v}_3$ er en generalisert egenvektoren, får vi et 1-tall over $\lambda_2 = 2$ som er i tredje kolonne. J-matrisen blir altså

$$J = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi funnet jordanformen $A = VJV^{-1}$ gitt ved

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Wolfram-alpha er enig:)