Reelle indreproduktrom

Oppgave 1

La $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ være en ortogonal basis for vektorrommet V. Vis at vektoren

$$\mathbf{z} = \sum_k \frac{(\mathbf{x}, \mathbf{v}_k)}{(\mathbf{v}_k, \mathbf{v}_k)} \mathbf{v}_k$$

er den vektoren i V som minimerer avstanden $\mathbf{x} - \mathbf{z}$ dersom $\mathbf{x} \notin V$. Bruk kun aksiomene for indreprodukt.

Oppgave 2

Finn en ortogonal basis for kolonnerommet til

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Oppgave 3

Vis at

$$(f, g) = \sum_k f(x_k) g(x_k)$$

er et indreprodukt mellom funksjoner f og g der vi kun evaluerer funksjonene i et endelig antall punkter x_k.

Oppgave 4

Bruk Gram-Schmidts metode for å utlede regresjonskoeffisientene.

Oppgave 5

Bruk Gram-Schmidts metode til å finne de første elementene av en ortogonal basis for spennet til polynomene $\{1, x, x^2, \ldots\}$ på intervallet $[-1, 1]$. Sjekk at du får Legendrepolynomene.