T-periodiske funksjoner og komplekse fourierrekker

Oppgave 1

La funksjonen f være gitt ved

$$f(t) = \begin{cases} 0 & -\frac{T}{2} \leq t < 0 \\ 1 & 0 \leq t < \frac{T}{2}, \end{cases}$$

a) Finn den reelle fourierrekken til den T-periodiske utvidelsen av f og plott i python.

b) Finn den komplekse fourierrekken til den T-periodiske utvidelsen av f, og plott i python.

Hei! Her er koden:)

c) Løs initialverdiproblemet

$$\dot{y} + \alpha y = f(t) \quad \text{hvor} \quad y(0) = 20.$$

Oppgave 2

a) Finn den komplekse fourierrekken til sagtannbølgen, altså den 2π-periodiske odde utvidelsen av $x(t) = t$.

b) Finn den komplekse fourierrekken til trekantbølgen, altså den 2π-periodiske utvidelsen av

$$x(t) = \begin{cases} \pi + t & -\pi \leq t < 0 \\ \pi - t & 0 \leq t < \pi \end{cases}$$

Hei igjen! Jeg rakk ikke bli helt ferdig med 2b. Vi fant $c_n = \frac{1-(-1)^n}{\pi n^2}$, som man kan dele opp til to ulike koeffisienter når n er oddetall og når n er partall. I tillegg må man regne ut c_0. Ved å så putte inn c_0 og c_n i uttrykket for kompleks fourierrekke, så ender man opp med

$$x(t) = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{i(2n-1)t}}{(2n-1)^2}.$$

Oppgave 3

Utled at

$$c_n = \frac{a_n - ib_n}{2} \quad \text{og} \quad a_n = c_n + c_{-n}$$

gjelder for fourierkoeffisientene a_n, b_n og c_n.

Oppgave 4 (TMA4120 H22 Q2)

La funksjonen f være definert på $[-1,1]$ av

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \\ 1, & \frac{1}{2} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

Vis at fourierrekken til f er gitt ved

$$S_f(x) = \frac{1}{2} - \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\cos\left((2n+1)\pi x\right)}{2n+1}.$$

Skisser $S_f(x)$ på intervallet $[-2,2]$ og regn ut summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}.$$

Dette er en eksamensoppgave fra TMA4120 Matematikk 4K. Løsningsforslag ligger her under problem 2.

Litt teori:

For to uker siden lærte dere at en 2π-periodisk funksjon kan skrives som en fourierrekke slik:

Reell fourierrekke til 2π-periodisk funksjon

Hvis f oppfyller en del krav og 2π-periodisk, kan man skrive f som en fourierrekke ved

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nt + b_n \sin nt).$$

Koeffisientene er gitt ved

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt \,\mathrm{d}t \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt \,\mathrm{d}t.$$

Denne uken generaliserer vi dette, og ser på funksjoner med en generell periode T:

Reell fourierrekke til T-periodisk funksjon

Hvis f oppfyller en del krav og er T-periodisk, kan man skrive f som en fourierrekke ved

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right) \quad \text{med} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Koeffisientene er gitt ved

$$a_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\omega t) \,\mathrm{d}t \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\omega t) \,\mathrm{d}t.$$

Kompleks fourierrekke til T-periodisk funksjon

Hvis f oppfyller en del krav og er T-periodisk, kan man skrive f som en fourierrekke ved

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad \text{med} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Koeffisienten er gitt ved

$$c_n = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(t)e^{-in\omega t} \,\mathrm{d}t.$$

Odde og jevne funksjoner

$\text{odd} \cdot \text{jevn} = \text{odd}$

$\text{odd} \cdot \text{odd} = \text{jevn}$

$\text{jevn} \cdot \text{jevn} = \text{jevn}$

$$\int_{-L}^{L} \text{odd} = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \text{jevn} = 2\int_{0}^{L} \text{jevn}$$

$\cos{(kx)}$ er jevn.

$\sin{(kx)}$ er odd.

Nyttige ting

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$
$$\sin{(x)} = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$
$$e^{ix} = \cos{(x)} + i\sin{(x)}$$