Reelle fourierrekker

Forrige uke løste vi bølgelikningen $\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t)$ med randkravene $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$. Vi brukte separasjon av variable ($u(x,t) = y(x)z(t)$) og fant den generelle løsningen

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nct) + b_n \sin(nct)) \sin(nx).$$

Denne uken legger vi til initialbetingelsene $u(x,0) = f(x)$ og $\dot{u}(x,0) = g(x)$ for funksjoner f og g.

Oppgave 1

Vi ser på randverdiproblemet for bølgelikningen

$$\ddot{u}(x,t) = c^2 u''(x,t), \quad u(t,0) = u(\pi,0) = 0, \quad u(x,0) = f(x), \quad \dot{u}(x,0) = g(x).$$

a) Ta utgangspunkt i den generelle løsningen vi fant forrige uke, og forklar at koeffisientene blir

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad b_n = \frac{2}{cn\pi} \int_0^{\pi} g(x) \sin(nx)\,\mathrm{d}x.$$

b) Finn a_n og b_n når $f(x) = x(\pi - x)$ og $g(x) = 0$.

Oppgave 2

Vis at en funksjon kan skrives som en sum av en odd og en jevn funksjon.

Fourier rekke. Hvis f er deriverbar og $f(-\pi) = f(\pi)$ kan man skrive f som en fourierrekke ved

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

på intervallet $[-\pi, \pi]$. Koeffisientene er gitt ved

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x \quad \text{og} \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

Oppgave 3

a) Finn fourierrekken til x.

b) Finn fourierrekken til x^2.

c) Finn fourierrekken til $2x + 3x^2$.