① s. 50 i boka, inverse funksjoner s. 97

Invers funksjon: La funksjonen $f: A \to B$.
f er inverterbar hvis det eksisterer en funksjon $g: B \to A$ slik at

$g(f(x)) = x$ for alle $x \in A$

$f(g(y)) = y$ for alle $y \in B$

Ⅰ f må være injektiv

↳ $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

↳ funksjoner som er strengt voksende eller avtagende

Ⅱ f må være surjektiv (treffe hele B) ~~B må være~~ verdimengden til ~~f~~

↳ B må være ~~Kodo~~ verdimengden til f.

(for alle $y \in B$ finnes en $x \in A$ s.t. $f(x) = y$)

definisjon av surjektiv

OPPGAVE 1:

Ⅰ Injektiv?

$f'(x) = \frac{2x}{x^2-9} > 0 \quad x > 3 \quad x^2 > 9 \quad x^2 - 9 > 0$

$\Rightarrow$ f er injektiv. (siden strengt voksende)

(II) Surjektiv? Er $\mathbb{R}$ verdimengden til f?

i vårt tilfelle $\mathbb{R}$, i andre oppgaver med $f: A \to B$ blir det B.

f er kontinuerlig og $f(x) \to \infty$ når $x \to \infty$

og $f(x) \to -\infty$ når $x \to 3$.

sjekker endepunkt i D_f, siden f er injektiv

Evt.

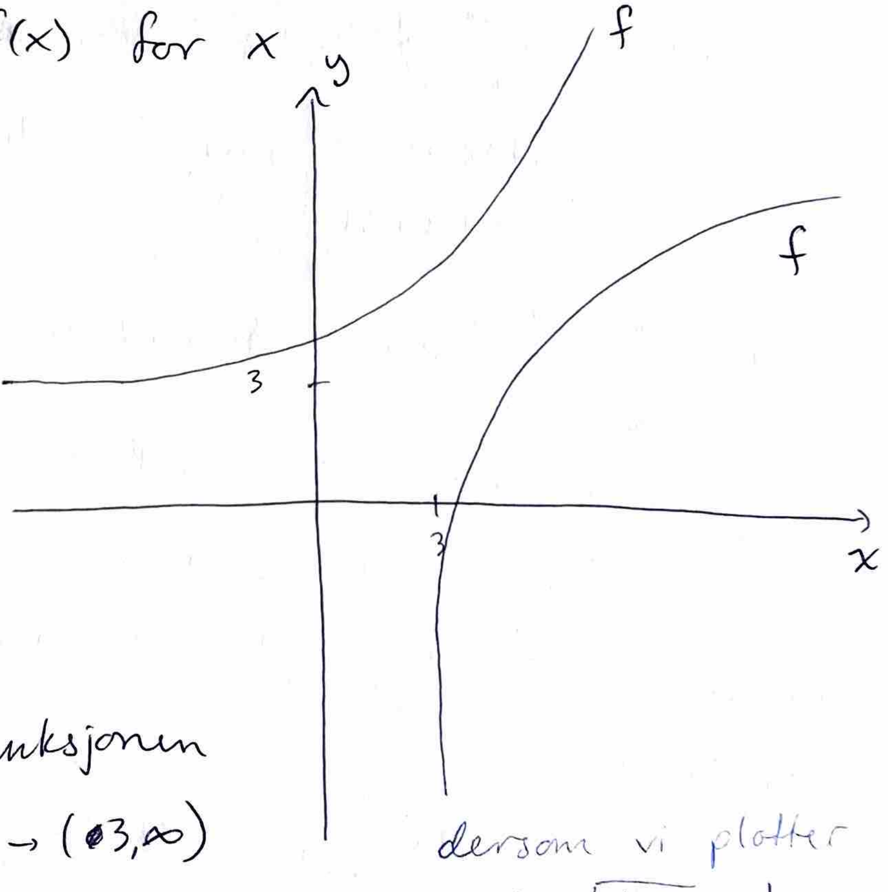
$$\lim_{x \to \infty} \ln(x^2 - 9) = \ln \infty = \infty$$

$$\lim_{x \to 3} \ln(x^2 - 9) = \ln 0 = -\infty$$

f treffer hele $\mathbb{R}$

$\hookrightarrow$ f har en invers.

Løse ~~f~~ $y = f(x)$ for x



$$y = \ln(x^2 - 9)$$

$$e^y = e^{\ln(x^2-9)}$$

$$e^y = x^2 - 9$$

$$x^2 = e^y + 9$$

$$x = \sqrt{e^y + 9}$$

Den inverse funksjonen til f er $f^{-1}: \mathbb{R} \to (3, \infty)$ gitt ved $f^{-1}(x) = \sqrt{e^x + 9}$.

dersom vi plotter $g(y) = \sqrt{e^y + 9}$ hvor y er på y-aksen får vi samme graf som f.

Mens gir speilet om $y = x$

②

a) Totalmatrisen til likningssystemet blir

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 6 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right] \underset{\mathrm{II}(-1)}{\overset{\mathrm{I}\to\mathrm{I}+\mathrm{II}+\mathrm{III}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & -4 \end{array}\right]$$

$$\overset{\mathrm{III}\to\mathrm{III}+2\mathrm{II}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$.

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

La $x_3 = s$ $\quad s \in \mathbb{R}$.

fri parameter

$x_1 - s = 2$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 2+s \\ 0 \\ s \end{bmatrix}$$

vendelig mange løsninger

b) Egenverdier λ og egenvektorer $\vec{v} \neq \vec{0}$ oppfyller $A\vec{v} = \lambda\vec{v}$.

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0} \qquad I\vec{v} = \vec{v}$$

$$A\vec{v} - \lambda I\vec{v} = (A - \lambda I)\vec{v} = \vec{0}$$

~~det(A)~~ siden $\vec{v} \neq \vec{0}$ må $\det(A - \lambda I) = 0$

siden da har $(A-\lambda I)\vec{v} = \vec{0}$ ikke-triviell løsning.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -3 \\ -1 & 3-\lambda & 1 \\ -2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$-3\begin{vmatrix} -1 & 3-\lambda \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = (3-\lambda)\Big((3-\lambda)(2-\lambda) - 1\Big) - (\lambda - 2 + 2)$$

$$-3\big(-1 + 2(3-\lambda)\big) = (3-\lambda)(5 - 5\lambda + \lambda^2) \underbrace{-\lambda + 3 - 18 + 6\lambda}_{\substack{5\lambda - 15 \\ -5(3-\lambda)}}$$

$$= (3-\lambda)(5 - 5\lambda + \lambda^2 - \cancel{4}5)$$

$$= (3-\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda) = \lambda(3-\lambda)(\lambda - 5) = 0$$

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = 3, \quad \lambda_3 = 5$$

$\lambda_1 = 0$

Skal løse $(A - 0 \cdot I)\vec{v} = \vec{0} \Rightarrow A\vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La $\vec{v} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$\begin{cases} v_1 - 3v_2 - v_3 = 0 \\ v_2 = 0 \end{cases}$$

La $v_3 = s \quad s \in \mathbb{R}$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} s \\ 0 \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\lambda_1 = 0$ har egenvektor $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$\lambda_2 = 3$ løser $(A - 3I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3-3 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3-3 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-3 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{III \to III - 2II}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right] \overset{III \to III - I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} v_1 - v_3 = 0 \\ v_2 - 3v_3 = 0 \end{cases} \qquad La \ v_3 = s \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} s \\ 3s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \boxed{\lambda_2 = 3 \text{ har egenvektor } \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}.}$$

$\lambda_3 = 5$ løser $(A - 5I)\vec{v} = \vec{0}$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3-5 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 3-5 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 2-5 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & -3 & 0 \end{array}\right]$$

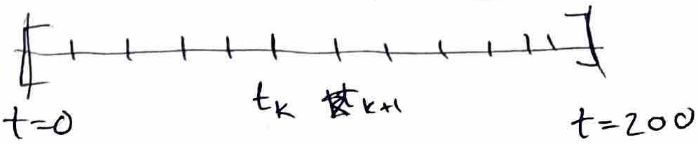
$$\overset{III \to III - I}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & \cancel{4}1 & -\cancel{4}1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \begin{cases} v_1 + 2v_{\cancel{3}2} - v_3 = 0 \\ v_2 - v_3 = 0 \end{cases} \qquad v_3 = s \quad s \in \mathbb{R}$$

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} \cancel{3}s \\ s \\ s \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} \cancel{3}-1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\lambda_3 = 5 \text{ har egenvektor } \cancel{v} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

(3) $y' = y^2 - y^3, \quad y(0) = 0,01$

vi finner verdi til y i disse punktene

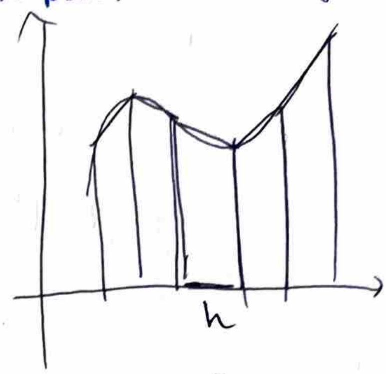


La $f(y) = y^2 - y^3$.

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} y' = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y)$$

det er dette integralet vi bruker trapesmetoden på

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(y)\,dt$$



$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \frac{h}{2}\left(f(y(t_k)) + f(y(t_{k+1}))\right)$$

$y_{k+1} = y(t_{k+1})$ ← enklere notasjon

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(y_k^2 - y_k^3 + y_{k+1}^2 - y_{k+1}^3\right)$$

vanskelig å løse for y_{k+1}, men er på formen $y_{k+1} = g(y_{k+1})$ $\Rightarrow$ fikspunktiterasjon for å finne y_{k+1}

$x = g(x)$.

i koden bruker vi fikspunktiterasjon n ganger på likningen for trapesmetoden

KODE

```
import numpy as np

n = 1000        # antall delintervaller

T = 200
h = T / n       # steglengde

def f(y):
    returnn y^2 - y^3

y = np.zeros(n + 1)
y[0] = 0,01

~~for~~
```

→

```
for k in range(n):
    y[k+1] = y[k] + h·(y[k]^2 - y[k]^3)
                     f(y[k])
    z = 100

    while np.abs(y[k+1] - z) > 0,0001:
        z = y[k+1]
        y[k+1] = y[k] + (h/2)·(y[k]^2 - y[k]^3 + y[k+1]^2 - y[k+1]^3)
                               f(y[k]) + f(y[k+1])
```

først her bruker vi trapesmetoden

mens avstanden er stor ~~ens~~ vil vi gjøre den mindre.

$$x = y_{k+1}$$

$$x_{n+1} = g(x_n)$$

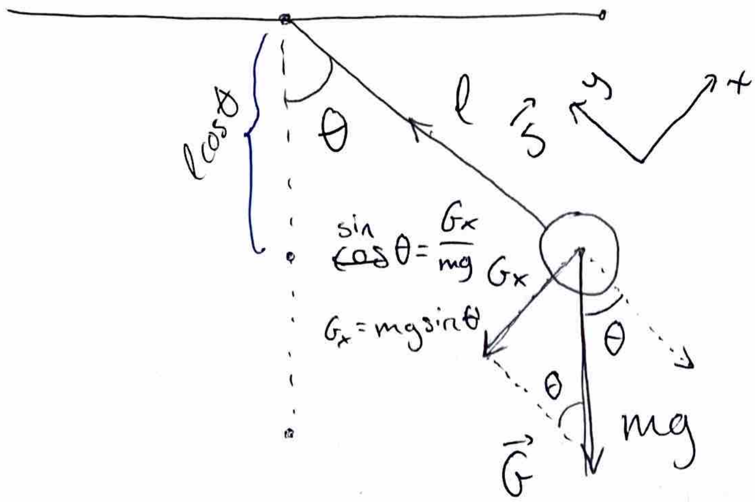
$$\cancel{g(} \quad y[k]$$

OBS: jeg ble spurt om hvor jeg ville sluttet koringen på eksamen og sa jeg hadde sluttet slik som over, men det kan være lurt å legge til en svarsetning til for å vise forståelse, f.eks:

~~[illegible]~~ y-arrayet er nå fylt med verdier som tilnærmet ligger på $y(t)$ på tidsintervallet $t \in [0, 200]$

Poenget er bare at det er viktig å vise forståelse :)

④



ingen akselerasjon i y-retning

All akselerasjon er i x-retning og kommer fra x-komp. til tyngdekraft.

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

$ma = -mg\sin\theta$ (minus siden mot positiv x-retning)

$a + g\sin\theta = 0$ $\quad a = l\ddot{\theta}$, $v = l\dot{\theta}$ $\quad \boxed{v = \frac{2\pi l}{T} = \omega r}$

sammenheng mellom translatorisk akselerasjon og vinkelakselerasjon.

$l\ddot{\theta} + g\sin\theta = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0$

Et førsteintegral til en differensiallikning er en funksjon som er konstant for en løsning av differensiallikningen.

ganger med $\dot{\theta}$ og integrerer

$$\ddot{\theta}\cdot\dot{\theta} + \frac{g}{l}\cdot\dot{\theta}\sin\theta = 0$$

$$\frac{1}{2}(\dot{\theta})^2 - \frac{g}{l}\cos\theta = C_1 \quad /\cdot ml^2$$

energibevaring

$$\frac{1}{2}m(l\dot{\theta})^2 - mgl\cos\theta = C$$

$u = \dot{\theta}$ $\quad \frac{du}{dt} = \ddot{\theta}$

$\ddot{\theta}\cdot\dot{\theta}\,dt = \frac{du}{dt}\cdot u\cdot dt$

$= \int u\,du = \frac{1}{2}u^2$

$mgh = mg(l - l\cos\theta)$

$= -mgl\cos\theta + mgl$

kinetisk energi $\frac{1}{2}mv^2$ $(v = l\dot{\theta})$

potensiell energi

førsteintegralet til pendellikningen sier at den totale energien (kinetisk + potensiell) er konstant

konstanten vil være ulik for ulike initialbetingelser, f.eks. hvor vi slipper pendelen fra og hva startfarten er

⑤ Taylorrekke: $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$

↳ om $a=0$ $\quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$

Taylorrekke om 0 for $e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$

$$e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{x^2}{2}\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} dx$$

bytter rekkefølge på sum og integral (skummelt, men lov)

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \int_0^1 x^{2n} dx$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left[\frac{1}{2n+1} x^{2n+1}\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n!} \left(\frac{1}{2n+1} \cdot 1 - 0\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)}$$

⑥ Definisjon: En følge $\{a_n\}$ sies å konvergere mot tallet L, og vi skriver $\lim_{n\to\infty} a_n = L$, dersom det for alle reelle tall $\varepsilon > 0$ finnes et tall $N \in \mathbb{N}$ slik at $n > N \Rightarrow |a_n - L| < \varepsilon$.

$$|a_n - L| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \left|\frac{n-1}{n} - \frac{n}{n}\right| = \left|\frac{n-1-\cancel{n}}{n}\right| = \left|-\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

siden $n > 0$

Ønsker $\frac{1}{n} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n$

Velger $N > \frac{1}{\varepsilon}$ ($N \in \mathbb{N}$, så ikke likhet)

Da får vi

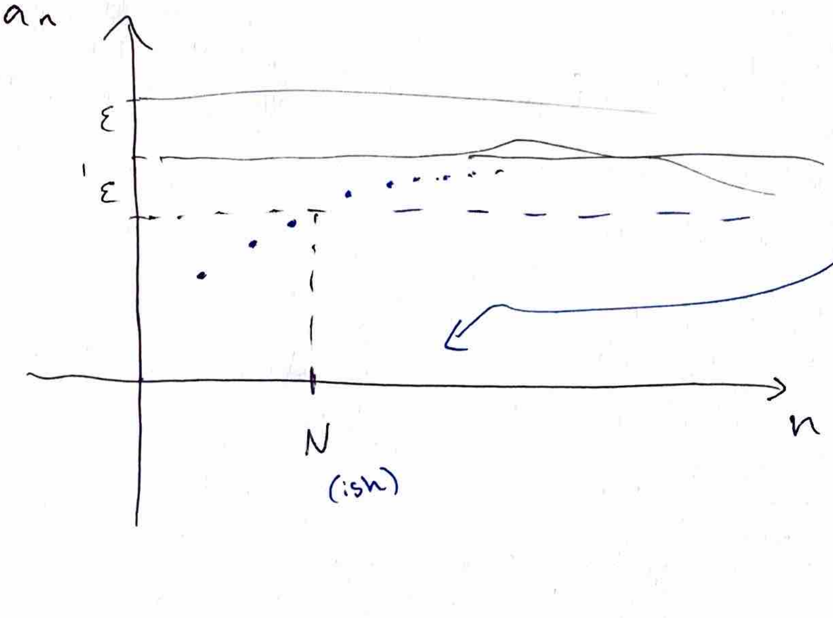
$$|a_n - L| = \left|\frac{n-1}{n} - 1\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$$n > N \iff \frac{1}{n} < \frac{1}{N}$$

$$N > \frac{1}{\varepsilon} \iff \frac{1}{N} < \frac{1}{\frac{1}{\varepsilon}} = \varepsilon$$

$\boxed{\text{Poenget med slike oppgaver: finne } N}$

og vise at det funker altså $|a_n - L| < \varepsilon$ når $n > N$.



til høyre for denne N er a_n innenfor ε avstand fra L, som er det vi ønsker fra definisjonen

(7) Avgjør om $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer eller divergerer

Vet at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ konv. siden geometrisk

med $|x|<1$.

$$(n+1)2^n \geq 2^n \qquad n \geq 0$$

$$\frac{1}{(n+1)2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

alle ledd i summen vår er mindre eller lik leddene i en sum som konvergerer. Da sier sammenligningstesten at $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)2^n}$ konvergerer.