Dag 1 - Oppgaver med løsningsforslag

Løsningsforslag nederst

1. Forenkle uttrykkene

a) $\frac{25}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{10}\right)$

b) $\log_{1/3} 3^{2x}$

c) $(\sqrt{x})^{-6}$

d) $\ln \sqrt{e}$

e) $\dfrac{5!}{3!}$

f) $\dfrac{3^4-2^6}{17}$

g) $\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}$

2. La $A=\{2, 4, -3, -\frac{2}{3}, \pi\}$ og $B=\{1, 2, -5, 0\}$. Beregn

a) $A \cap \mathbb{Q}$

b) $A \cup B$

c) $B \cap \mathbb{N}$

3. Løs likningene

a) $\frac{x+2}{3x-1}=5$

b) $|-6x+3|=27$

c) $e^{2x}-2e^x-3=0$

d) $8x^3+8x^2-2x-2=0$

e) $|x+3|=|x-11|$

f) $\ln(x)+\ln(x-2)=0$

g) $5^{3x-2}=125^{2x}$

h) $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{x-2}=8^x$

i) $\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots=1$

4. Løs ulikhetene

a) $x^2-2x \leq 0$

b) $x^2-5x>-4$

c) $e^{(x-10)}<5$

d) $\ln^2(x)>1$

e) $|3x-10|<5$

f) $\cos x>1$

g) $\sqrt{(x-2)^2+8x}>1$

h) $11(2x-15)<x+3$

5. Bruk implikasjons- og ekvivalenspiler på følgende utsagn.

i) $x=4$

ii) $x^2=16$

iii) $x=\pm 4$

iv) $|x|=4$

v) $x=-4$

6. Løs likningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1+x_2&=15\\ 3x_1-x_2&=5 \end{aligned}$$

for x_1 og x_2.

7. Morten har sauer og kyllinger på gården sin. Han opplyser at dyrene til sammen har 382 bein og 141 hoder. Hvor mange sauer og hvor mange kyllinger har Morten?

Nøtter

1. Vis at likningen $ax^2 + bx + c = 0$ har løsningene

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

dersom $b^2 - 4ac \geq 0$ og $a \neq 0$.

2. Vis at

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

for $n \in \mathbb{N}$.

3. Var alt dette for enkelt? Søk opp "gausseliminasjon", og løs oppgave 5 ved bruk av matriser.

Løsningsforslag

1a) $\frac{25}{4}\left(\frac{2}{5}+\frac{8}{10}\right)=\frac{25\cdot 2}{4\cdot 5}+\frac{25\cdot 8}{4\cdot 10}=\frac{5}{2}+5=\frac{5+10}{2}=\frac{15}{2}$

1b) $\log_{1/3}3^{2x}=2x\log_{1/3}3=2x\cdot(-1)=-2x$

1c) $(\sqrt{x})^{-6}=(x^{\frac{1}{2}})^{-6}=x^{-\frac{6}{2}}=x^{-3}$

1d) $\ln\sqrt{e}=\ln e^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\ln e=\frac{1}{2}$

1e) $\frac{5!}{3!}=\frac{5\cdot 4\cdot 3!}{3!}=5\cdot 4=20$

1f) $\frac{3^4-2^6}{17}=\frac{(3^2-2^3)(3^2+2^3)}{17}=\frac{(9-8)(9+8)}{17}=\frac{1\cdot 17}{17}=1$

1g) $\frac{e^x-e^{-x}}{e^{2x}-e^{-2x}}=\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x)^2-(e^{-x})^2}=\frac{e^x-e^{-x}}{(e^x-e^{-x})(e^x+e^{-x})}=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$

2a) $A\cap\mathbb{Q}=\{2,\ 4,\ -3,\ -\frac{2}{3}\}$

2b) $A\cup B=\{1,\ -5,\ 0,\ 2,\ 4,\ -3,\ -\frac{2}{3},\ \pi\}$

2c) $B\cap\mathbb{N}=\{1,\ 2\}$

3a) Vi ganger med $3x-1$ på begge sider, slik at vi får likningen $x+2=5(3x-1)$. Ved å gange ut parentesen på høyre side får vi $x+2=15x-5$. Vi løser for x: $14x=7 \implies x=\frac{1}{2}$.

3b) Her løser vi de to likningene $-6x+3=27$ og $-6x+3=-27$. Den første likningen gir $x=-4$, mens den andre likningen gir $x=5$.

3c) Vi substituerer $u=e^x$, slik at likningen blir til $u^2-2u-3=0$. Denne likningen kan vi faktorisere til $(u-3)(u+1)=0$, altså må $u=3$ eller $u=-1$. Vi substituerer tilbake, og løser dermed $e^x=3$ og $e^x=-1$ for x. Det er kun den første av disse som har en løsning, nemlig $x=\ln 3$.

3d) En lur strategi her kan være å prøve å finne en rot, så bruke polynomdivisjon, så løse andregradslikningen man sitter igjen med enten ved bruk av faktorisering eller abc-formelen. Ved å stirre litt på likningen, ser vi at $x=-1$ er en løsning. Dermed bruker vi polynomdivisjon til å dele $8x^3+8x^2-2x-2$ på $x+1$.

$$
\begin{array}{r|l}
 & 8x^2 \qquad\quad -2 \\
\hline
x+1 & 8x^3+8x^2-2x-2 \\
 & -8x^3-8x^2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\quad -2x-2 \\
 & \qquad\qquad\quad\ \ 2x+2 \\
\cline{2-2}
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

Vi må altså løse andregradslikningen $8x^2-2=0$. Vi deler på 8 på begge sider og får $x^2-\frac{1}{4}=0$. Ved å bruke konjugatsetningen kan dette faktoriseres til $(x-\frac{1}{2})(x+\frac{1}{2})=0$. Altså har tredjegradslikningen løsningene $x=-1$, $x=\frac{1}{2}$ og $x=-\frac{1}{2}$.

3e) Her må $x+3$ og $x-11$ enten ha samme fortegn eller motsatt fortegn. Samme fortegn går ikke, ettersom det gir $x+3=x-11 \implies 3=-11$. Med motsatt fortegn får vi $x+3=-(x-11) \implies x+3=11-x$. Vi løser for x og får $2x=8 \implies x=4$.

3f) Logaritmeregler gir at $\ln(x)+\ln(x-2)=\ln(x(x-2))$. Vi har altså likningen $\ln(x(x-2))=0$. Det er kun $a=1$ som er slik at $\ln a=0$, dermed må $x(x-2)=1$. Dette er en annengradslikning vi kan skrive om til $x^2-2x-1=0$. Vi putter dette inn i abc-formelen, slik at $x=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-4\cdot(-1)}}{2}=\dfrac{2\pm\sqrt{8}}{2}=1\pm\sqrt{2}$. Men! $x=1-\sqrt{2}<0$, så $\ln x$ er udefinert hvis $x=1-\sqrt{2}$. Dermed er løsningen $x=1+\sqrt{2}$.

3g) Vi har at $125=5^3$. Logaritmeregler gir da at $125^{2x}=(5^3)^{2x}=5^{6x}$. Dermed har vi likningen $5^{3x-2}=5^{6x}$. Ved å sette eksponentene like hverandre og løse for x får vi $3x-2=6x \implies 3x=-2 \implies x=-\frac{2}{3}$.

3h) Vi har at $\frac{1}{4}=\frac{1}{2^2}=2^{-2}$ og $8=2^3$. Ved å benytte dette sammen med logaritmeregler får vi at likningen kan skrives som $(2^{-2})^{x-2}=(2^3)^x \implies 2^{-2x+4}=2^3x$. Ved å sette eksponentene lik hverandre får vi likningen $-2x+4=3x$. Vi løser for x og får $5x=4 \implies x=\frac{4}{5}$.

3i) La $s=\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots$, altså s er venstresiden av likningen, så vi vet at $s=1$. Ved å faktorisere ut $\frac{1}{x}$ på venstresiden får vi at likningen kan skrives som $\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^3}+\cdots\right)=1$. Inni parentesen kjenner vi igjen s, slik at likningen blir $\frac{1}{x}(1+s)=1$. Men vi vet at $s=1$, så ved å putte dette inn i likningen får vi $\frac{1}{x}(1+1)=1 \implies \frac{2}{x}=1 \implies x=2$. (Eventuelt kan man benytte formelen for summen av en konvergent geometrisk rekke, slik som lært i R2)

4a) Ulikheten kan skrives som $x(x-2)\leq 0$. Vi benytter fortegnsskjema

		0		2	
x	$-$		$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$		$+$
$x(x-2)$	$+$		$-$		$+$

Altså er $x(x-2)\leq 0$ når $x\in[0,\,2]$.

4b) Vi flytter over -4 og prøver å faktorisere venstresiden, da får vi $x^2-5x+4>0 \implies (x-1)(x-4)>0$. Fra fortegnsskjemaet ser vi at $(x-1)(x-4)>0$ når $x\in(-\infty,\,1)\cup(4,\,\infty)$.

		1		4	
$x-1$	$-$		$+$		$+$
$x-4$	$-$		$-$		$+$
$(x-1)(x-4)$	$+$		$-$		$+$

4c) Siden begge sider av ulikheten er positiv, kan vi ta logaritmen av begge sider. Ved å bruke logaritmeregler får vi da ulikheten $\ln\left(e^{x-10}\right) < \ln 5 \implies x - 10 < \ln 5 \implies x < 10 + \ln 5$.

4d) Vi kan skrive ulikheten som $\ln^2(x) - 1 > 0$. Ved å bruke konjugatsetningen kan vi faktorisere dette til $(\ln x - 1)(\ln x + 1) > 0$. $\ln x = 1$ når $x = e$ og $\ln x = -1$ når $x = \frac{1}{e}$, så fortegnsskjema blir

		$\frac{1}{e}$		e	
$\ln x - 1$	$-$		$-$		$+$
$\ln x + 1$	$-$		$+$		$+$
$(\ln x - 1)(\ln x + 1)$	$+$		$-$		$+$

Altså kan det se ut som om $\ln^2(x) - 1 > 0$ når $x \in (-\infty,\ \frac{1}{e}) \cup (e,\ \infty)$. Men! Vi kan ikke putte negative tall inn i logaritmefunksjonen så riktig løsning på ulikheten er $x \in (0,\ \frac{1}{e}) \cup (e,\ \infty)$.

4e) Her skal absoluttverdien til $3x - 10$ være mindre enn 5. Da må $3x - 10$ "ligge mellom" -5 og 5. Altså er vi ute etter x som løser ulikheten $-5 < 3x - 10 < 5$. Ved å løse dette som to ulikheter får vi $-5 < 3x - 10 \implies 3x > 5 \implies x > \frac{5}{3}$, og $3x - 10 < 5 \implies 3x < 15 \implies x < 5$. x må oppfylle begge ulikhetene, altså $x \in (\frac{5}{3},\ 5)$.

4f) Denne ulikheten har ingen løsning, ettersom $\cos x \in [-1, 1]$.

4g) Siden begge sider av ulikheten er positive, kan vi kvadrere begge sider. Da får vi ulikheten $(x-2)^2+8x > 1$. Vi ganger ut parenteser og flytter over 1 fra høyresiden

$$\begin{aligned}
(x-2)^2 + 8x &> 1 \\
x^2 - 4x + 4 + 8x &> 1 \\
x^2 + 4x + 4 &> 1 \\
x^2 + 4x + 3 &> 0 \\
(x+3)(x+1) &> 0
\end{aligned}$$

Fortegnsskjema blir

		-3		-1	
$x + 3$	$-$		$+$		$+$
$x + 1$	$-$		$-$		$+$
$(x+3)(x+1)$	$+$		$-$		$+$

Altså er $\sqrt{(x-2)^2 + 8x} > 1$ når $x \in (-\infty,\ -3) \cup (-1,\ \infty)$.

4h) Vi ganger ut parenteser og løser for x

$$
\begin{aligned}
11(2x-15) &< x+3 \\
22x-165 &< x+3 \\
21x &< 168 \\
x &< \frac{168}{21} \\
x &< 8
\end{aligned}
$$

5) Vi har at

- $i \implies ii$: hvis $x = 4$ må $x^2 = 16$, men vi kan ha $x^2 = 16$ uten at $x = 4$
- $ii \iff iii$: hvis $x^2 = 16$ må $x = 4$ eller $x = -4$, og hvis $x = 4$ eller $x = -4$ må $x^2 = 16$
- $iii \iff iv$
- $iv \impliedby v$: hvis $|x| = 4$ er ikke nødvendigvis $x = -4$, men hvis $x = -4$ så er $|x| = 4$

6) Her kan vi bruke addisjonsmetoden, så vi legger sammen de to likningene, da får vi $5x_1 = 20 \implies x_1 = 4$. Ved å putte dette inn i første likning og løse for x_2, får vi at $2 \cdot 4 + x_2 = 15 \implies x_2 = 7$. Altså er løsningen $(x_1, x_2) = (4, 7)$.

7) La s være antall sauer og k være antall kyllinger. Hver sau har fire ben og ett hode, mens hver kylling har to ben of ett hode. Ved å benytte informasjonen oppgitt, får vi altså de to likningene

$$
\begin{aligned}
4s + 2k &= 382 \\
s + k &= 141
\end{aligned}
$$

Dette likningssystemet kan vi løse ved hjelp av eliminasjonsmetoden. Fra andre likning får vi at $k = 141 - s$. Ved å putte dette inn i første likning får vi $4s + 2(141 - s) = 382 \implies 4s + 282 - 2s = 382 \implies 2s = 100 \implies s = 50$. Da er $k = 141 - s = 141 - 50 = 91$. Morten har dermed 50 sauer og 91 kyllinger.

Nøtter

1) Siden $a \neq 0$, starter vi med å dele på a.

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Vi ønsker å isolere x, så vi fullfører kvadratet på venstresiden ved å legge til $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ på begge sider

$$\begin{aligned}
x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= \left(\frac{b}{2a}\right)^2 \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} &= \frac{b^2}{4a^2} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c \cdot 4a}{a \cdot 4a} \\
\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 &= \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}
\end{aligned}$$

Siden vi har antatt at $b^2 - 4ac \geq 0$, tar vi kvadratroten av begge sider.

$$\begin{aligned}
x + \frac{b}{2a} &= \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} \\
x + \frac{b}{2a} &= \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}
\end{aligned}$$

Ved å flytte over $\frac{b}{2a}$, får vi dermed

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2) Vi bruker induksjon. Likningen stemmer for $n = 1$, siden

$$1^2 = \frac{1 \cdot (1+1)(2 \cdot 1 + 1)}{6} = \frac{2 \cdot 3}{6} = 1$$

Vi antar dermed at $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ for alle $n \in \mathbb{N}$. Siden vi vet at formelen stemmer for minste mulig $n \in \mathbb{N}$, prøver vi å vise at formelen stemmer for $n+1$ for en generell $n \in \mathbb{N}$. For $n+1$ blir høyresiden

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} &= \frac{(n^2+3n+2)(2n+3)}{6}\\ &= \frac{2n^3+3n^2+6n^2+9n+4n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\end{aligned}$$

Mens venstresiden blir

$$\begin{aligned}1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n(2n^2+n+2n+1)}{6}+n^2+2n+1\\ &= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{6n^2+12n+6}{6}\\ &= \frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}\end{aligned}$$

Siden høyresiden og venstresiden er like, har vi at formelen stemmer for $n+1$, og dermed for alle $n \in \mathbb{N}$.