Integrasjon - Oppgaver med løsningsforslag

Løsningsforslag nederst

1. Beregn de ubestemte integralene

a) $\displaystyle\int x^2 - 5x + e^x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int x\cos x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2-9} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int \frac{e^x}{e^x+5} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int \sin^3(x)\cdot\cos(x) \,\mathrm{d}x$

2. La f være funksjonen gitt ved $f(x) = 6x^2+4x-3$. Finn den antideriverte G til f som er slik at $G(1) = 0$.

3. Beregn de bestemte integralene

a) $\displaystyle\int_{-1}^{0} -x^3 + 3x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{1} (2x+1)e^{x^2+x} \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{0}^{\ln 2} e^{2x} \,\mathrm{d}x$

d) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x+2)^2} \,\mathrm{d}x$

e) $\displaystyle\int_{0}^{1} \sqrt{x^2+4x+4} \,\mathrm{d}x$

4. Finn arealet begrenset av grafene til de to funksjonene $f(x) = x^2$ og $g(x) = x+2$.

5. Utled uttrykket for delvis integrasjon ved å ta utgangspunkt i produktregelen for derivasjon.

6. La $f(x) = \tan x$.

a) Vis at $f'(x) = 1 + \tan^2 x$.

b) Regn ut $\displaystyle\int \frac{1+\tan^2 x}{\tan x} \,\mathrm{d}x$.

7. Beregn integralene *uten å finne en antiderivert*

a) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$

b) $\displaystyle\int_{0}^{5} x \,\mathrm{d}x$

c) $\displaystyle\int_{e}^{\pi} \mathrm{d}x$

8. Regn ut arealet av flaten avgrenset av grafene til f og g når $f(x) = -x^2+8x-7$ og $g(x) = x^2-1$.

9. Funksjonen f er gitt ved $f(x) = \cos(2x)$ for $D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. La S være flaten avgrenset av grafen til f og linja $y = \frac{1}{2}$.

a) Skissér S.

b) Beregn arealet av S.

c) Ved å rotere S om x-aksen får man et omdreiningslegeme. Hva er volumet av dette omdreiningslegemet?

Ekstra: Numerisk integrasjon

Summen $\mathcal{R}_n$ definert i teori-delen under tittelen "bestemt integrasjon og summasjon" kalles *venstre Riemann-sum*. Her kan du lese mer om Riemann-summer og numerisk integrasjon. Dette kommer de fleste av dere til å lære mer om på universitetet!

Løsningsforslag

1a)

$$\int x^2 - 5x + e^x \,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - \frac{5}{2}x^2 + e^x + C$$

1b) Vi bruker delvis integrasjon. La $u = x$, $v' = \cos x$. Da blir $u' = 1$, $v = \sin x$. Så vi får

$$\begin{aligned} \int x \cos x \,\mathrm{d}x &= x \sin x - \int 1 \cdot \sin x \,\mathrm{d}x \\ &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

1c) Substitusjon, la $u = x^2 - 9$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x$. Da får vi

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x^2 - 9} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{x}{u} \frac{\mathrm{d}u}{2x} \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \left| x^2 - 9 \right| + C \end{aligned}$$

(Ved å bruke konjugatsetningen og logaritmeregler er dette det samme som $\frac{1}{2} \ln |x - 3| + \frac{1}{2} \ln |x + 3| + C$)

1d) Substitusjon, la $u = e^x + 5$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = e^x$. Så vi får

$$\begin{aligned} \int \frac{e^x}{e^x + 5} \,\mathrm{d}x &= \int \frac{e^x}{u} \frac{\mathrm{d}u}{e^x} \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \ln |u| + C \\ &= \ln |e^x + 5| + C \end{aligned}$$

1e) Substitusjon, la $u = \sin x$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x$. Så

$$\begin{aligned}
\int \sin^3 x \cdot \cos x \,\mathrm{d}x &= \int u^3 \cdot \cos x \frac{\mathrm{d}u}{\cos x} \\
&= \int u^3 \,\mathrm{d}u \\
&= \frac{u^4}{4} + C \\
&= \frac{\sin^4 x}{4} + C
\end{aligned}$$

2) En generell antiderivert for f er gitt ved

$$\begin{aligned}
G(x) &= \int 6x^2 + 4x - 3 \,\mathrm{d}x \\
&= 2x^3 + 2x^2 - 3x + C
\end{aligned}$$

Så må vi finne C slik at $G(1) = 0$. Vi har at $G(1) = 2 \cdot 1^3 + 2 \cdot 1^2 - 3 \cdot 1 + C = 0$. Ved å løse denne likningen for C får vi $C = -1$. Så den antideriverte G til f som er slik at $G(1) = 0$ er gitt ved

$$G(x) = 2x^3 + 2x^2 - 3x - 1$$

3a)

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{0} -x^3 + 3x \,\mathrm{d}x &= \left[-\frac{x^4}{4} + \frac{3x^2}{2} \right]_{-1}^{0} \\
&= 0 - \left(-\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \right) \\
&= \frac{1}{4} - \frac{3}{2} \\
&= -\frac{5}{4}
\end{aligned}$$

3b) Substitusjon, la $u = x^2 + x$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 2x + 1$ og $u(0) = 0$, $u(1) = 2$. Så vi får

$$\begin{aligned}
\int_0^1 (2x+1)e^{x^2+x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^2 \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} e^u\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^2 e^u\,\mathrm{d}u \\
&= [e^u]_0^2 \\
&= e^2 - e^0 \\
&= e^2 - 1
\end{aligned}$$

3c)

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln 2} e^{2x}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^{\ln 2} \\
&= \frac{e^{2\ln 2}}{2} - \frac{e^0}{2} \\
&= \frac{e^{\ln 4}}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{4}{2} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

3d) Substitusjon, la $u = \sin x + 2$. Da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \cos x$ og $u(0) = 2$, $u(\frac{\pi}{2}) = 3$.

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{(\sin x + 2)^2}\,\mathrm{d}x &= \int_2^3 \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{u^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_2^3 \frac{\mathrm{d}u}{u^2} \\
&= \left[-\frac{1}{u}\right]_2^3 \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{6}
\end{aligned}$$

3e)

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{x^2+4x+4}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \sqrt{(x+2)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x+2\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{x^2}{2}+2x\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}+2-0 \\ &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

4) Her kan det være lurt å tegne opp de to grafene. Vi må finne x-koordinatene til skjæringspunktene mellom $f(x)=x^2$ og $g(x)=x+2$. Dette finner vi ved å løse likningen $f(x)=g(x)$, altså $x^2=x+2 \implies x^2-x-2=0$. Dette kan faktoriseres til $(x-2)(x+1)=0$, som vil si at vi har skjæringspunkter når $x=2$ og $x=-1$. I området mellom skjæringspunktene er $g(x)>f(x)$. For å finne arealet begrenset av grafene, integrerer vi dermed $g(x)-f(x)$ fra $x=-1$ til $x=2$.

$$\begin{aligned}\int_{-1}^2 x+2-x^2\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^2 \\ &= \frac{4}{2}+2\cdot 2-\frac{8}{3}-\left(\frac{1}{2}-2-\frac{-1}{3}\right) \\ &= 2+4-\frac{8}{3}-\frac{1}{2}+2-\frac{1}{3} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

Arealet begrenset av grafene til de to funksjonene $f(x)=x^2$ og $g(x)=x+2$ er altså $\frac{9}{2}$.

5) Produktregelen for derivasjon er gitt ved

$$(f\cdot g)' = f'g+fg'$$

Hvis vi nå integrerer begge sider får vi

$$\int (f\cdot g)' = \int (f'g+fg')$$

På venstresiden benytter vi nå at ved å integrere en derivert funksjon, så får vi bare funksjonen selv. På høyresiden benytter vi linearitet

$$f\cdot g = \int f'g + \int fg'$$

Ved å flytte over et av integralene, sitter vi igjen med uttrykket for delvis integrasjon, nemlig

$$\int fg' = fg - \int f'g$$

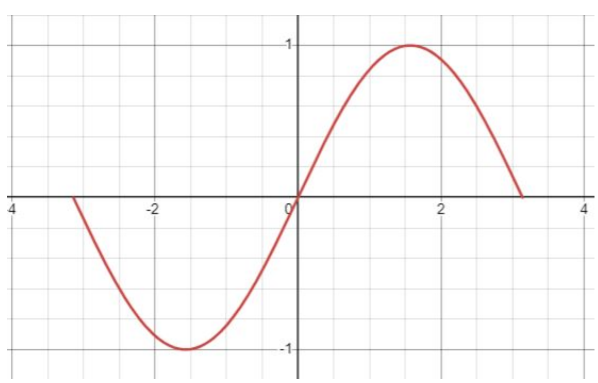
6a) Vi har at $f(x) = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Ved å bruke brøk-regelen for derivasjon får vi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \\ &= 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

6b) Her kan vi bruke resultatet fra a-oppgaven, samt substitusjon. La $u = \tan x$, da er $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = 1 + \tan^2 x$.

$$\begin{aligned} \int \frac{1 + \tan^2 x}{\tan x}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}}{u}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\mathrm{d}u}{u} \\ &= \ln u + C \\ &= \ln(\tan x) + C \end{aligned}$$

7a) Dette integralet kan vi løse ved å tegne grafen til $\sin x$ fra $x = -\pi$ til $x = \pi$.



Vi ser at arealet over x-aksen er lik arealet under x-aksen. Arealet under x-aksen er negativt, mens det over er positivt. Siden det negative arealet har lik absoluttverdi som det positive arealet, er summen av disse arealene 0, altså

$$\int_{\pi}^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = 0$$

7b) Dette arealet danner en rettvinklet trekant med høyde $h = 5$ og grunnlinje $g = 5$. Så bruker vi at arealet av en trekant er gitt ved $\frac{gh}{2}$. Arealet blir $\frac{gh}{2} = \frac{25}{2}$. Dermed er

$$\int_0^5 x \, \mathrm{d}x = \frac{25}{2}$$

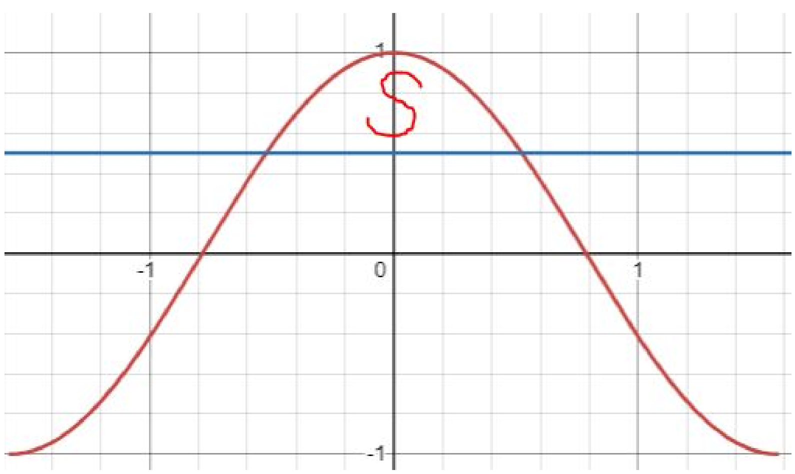
7c) Her kan vi tenke oss at vi integrerer den konstante funksjonen 1. Arealet vi er ute etter danner dermed et rektangel med høyre $h = 1$ og grunnlinje mellom e og π, altså $g = \pi - e$. Så

$$\int_e^\pi \mathrm{d}x = \pi - e$$

8) Vi starter med å finne x-koordinatene til skjæringspunktene ved å løse $f(x) = g(x)$, altså $-x^2 + 8x - 7 = x^2 - 1 \implies 2x^2 - 8x + 6 = 0 \implies x^2 - 4x + 3 = 0 \implies (x-3)(x-1) = 0$. Skjæringspunktene er dermed i $x = 1$ og $x = 3$. Mellom skjæringspunktene er $f(x) > g(x)$, så vi integrerer funksjonen $f(x) - g(x)$ for å finne arealet av flaten

$$\begin{aligned}
\int_1^3 -x^2 + 8x - 7 - x^2 + 1 \, \mathrm{d}x &= \int_1^3 -2x^2 + 8x - 6 \, \mathrm{d}x \\
&= \left[-\frac{2x^3}{3} + 4x^2 - 6x \right]_1^3 \\
&= -\frac{2 \cdot 3^3}{3} + 4 \cdot 3^2 - 6 \cdot 3 - \left(-\frac{2 \cdot 1}{3} + 4 \cdot 1 - 6 \cdot 1 \right) \\
&= -18 + 36 - 18 + \frac{2}{3} - 4 + 6 \\
&= \frac{8}{3}
\end{aligned}$$

9a)



9b) $\cos 2x$ skjærer linja $y = \frac{1}{2}$ når $\cos 2x = \frac{1}{2}$. Det skjer når $2x = \pm\frac{\pi}{3} \implies x = \pm\frac{\pi}{6}$. Arealet av S blir

$$\begin{aligned}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos(2x) - \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x &= \left[\frac{1}{2}\sin(2x) - \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \frac{1}{2}\sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{12} - \frac{1}{2}\sin(-\frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{12} \\ &= \sin(\frac{\pi}{3}) - \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi}{6}\end{aligned}$$

9c) Volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å rotere S rundt x-aksen finner vi ved å ta volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å dreie $\cos 2x$ rundt x-aksen og så trekke fra volumet av omdreiningslegemet som dannes ved å rotere $y = \frac{1}{2}$ rundt x-aksen.

$$V = \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x$$

For å løse det første integralet er det flere måter å gå frem på, man kan for eksempel bruke at

$$\begin{aligned}\cos^2 x + \sin^2 x &= 1 \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ \implies \cos 2x &= \cos^2 x - (1 - \cos^2 x) = 2\cos^2 x - 1 \\ \implies \cos^2 x &= \frac{\cos 2x + 1}{2}\end{aligned}$$

Ved å bruke dette får vi

$$\begin{aligned}V &= \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos^2 2x\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \left(\frac{1}{2}\right)^2 \mathrm{d}x \\ &= \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos 4x + 1}{2}\,\mathrm{d}x - \pi\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{4}\,\mathrm{d}x \\ &= \pi\left[\frac{1}{8}\sin 4x + \frac{x}{2}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} - \pi\left[\frac{x}{4}\right]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \\ &= \pi\left(\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi}{12} - \frac{1}{8}\sin\frac{-2\pi}{3} + \frac{\pi}{12}\right) - \pi\left(\frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{24}\right) \\ &= \frac{\pi}{4}\sin\frac{2\pi}{3} + \frac{\pi^2}{6} - \frac{\pi^2}{12} \\ &= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi^2}{12}\end{aligned}$$

Volumet er altså $\frac{\sqrt{3}}{8}\pi + \frac{\pi^2}{12}$.