Geometri oppgaver med løsningsforslag

Løsningsforslag nederst

1. Løs likningene for $x \in [0,\, 2\pi)$

a) $4\sin x - 1 = 1$

b) $3\tan x + 3 = 0$

c) $4\sin^2 x + 8\sin x + 4 = 0$

d) $2\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 = 0$

2. La f være funksjonen gitt ved

$$f(x) = 2\sin\left(\frac{\pi}{6}x - \frac{\pi}{3}\right) - 1 \quad D_f = (0,\, 20)$$

Finn amplituden, likevektslinja og perioden.

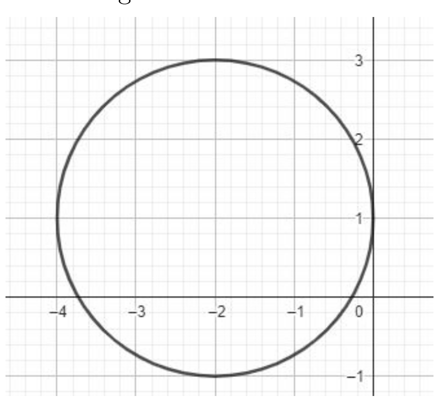
3. Skissér følgende uttrykk

a) $x^2 + y^2 \leq 1$

b) $x^2 + y^2 - 2x - y + 1 = 0$

c) $2x + 3y - 5z = 3$

4. Finn likningen for sirkelen

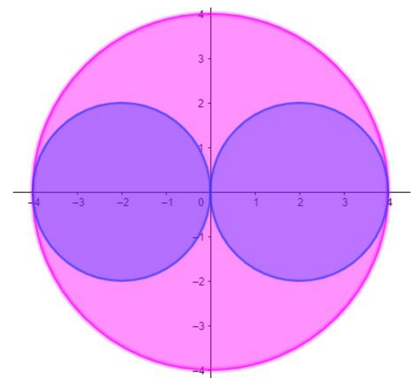


5. En trekant har sidelengder 3, 4 og 5. Hva er arealet av trekanten?

6. Hva er vinkelen mellom $\mathbf{u} = (1,\, 2,\, -3)$ og $\mathbf{v} = (3,\, -5,\, 1)$?

7. Finn a slik at vektorene $\mathbf{x}_1 = (4,\, a, -1)$ og $\mathbf{x}_2 = (2,\, 3,\, a)$ er ortogonale.

8. Hva er arealet av det rosa området? Radiusen til den største sirkelen er 4, mens radiusene til de to små sirklene er 2.



9. Planet α er bestemt av punktene $A = (1,\, 0,\, 3)$, $B = (0,\, 1,\, 2)$ og $C = (2,\, 3,\, 2)$.

a) Bestem en likning for planet α.

b) Bestem en likning for planet β som er parallelt med α og går gjennom punktet $P = (2,\, -5,\, 5)$.

c) Ei kule tangerer α i punktet A og β i et punkt Q. Bestem eksakte verdier for koordinatene til Q.

10. Bruk enhetssirkelen til å vise at

a) $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta$

b) $\cos(\theta + \pi) = -\cos\theta$

c) $\cos(-\theta) = \cos\theta$

d) $\sin(-\theta) = -\sin\theta$

11. La $\mathbf{u} = (u_1,\, u_2,\, u_3)$ og $\mathbf{v} = (v_1,\, v_2,\, v_3)$. Vis at kryssproduktet $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ står normalt på både $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

Løsningsforslag

1a)

$$4\sin x - 1 = 1$$
$$4\sin x = 2$$
$$\sin x = \frac{1}{2}$$
$$\implies x = \frac{\pi}{6} \text{ eller } x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

1b)

$$3\tan x + 3 = 0$$
$$3\tan x = -3$$
$$\tan x = -1$$
$$\implies x = \frac{3\pi}{4} \text{ eller } x = -\frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{4}$$

1c) Dette er en andregradslikning. La $u = \sin x$

$$4\sin^2 x + 8\sin x + 4 = 0$$
$$4u^2 + 8u + 4 = 0$$
$$u^2 + 2u + 1 = 0$$
$$(u+1)^2 = 0$$
$$\implies u = -1$$

Altså $\sin x = -1 \implies x = \frac{3\pi}{2}$.

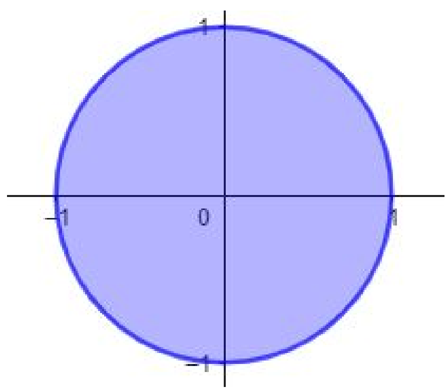
1d)

$$\begin{aligned}
2\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)-1&=0\\
\sin\left(\frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}\right)&=\frac{1}{2}\\
\implies \frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6} \implies x&=\frac{\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=1+2=3\\
\text{eller} \implies \frac{\pi}{6}x-\frac{\pi}{3}=\pi-\frac{\pi}{6} \implies x&=\frac{\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{6}}=5+2=7>2\pi
\end{aligned}$$

Så $x=3$.

2) Ved å sammenligne med den trigonometriske funksjonen fra teori-delen, ser vi at amplituden er $A=2$, likevektslinja er $y=-1$ og perioden er $T=\frac{2\pi}{\frac{\pi}{6}}=12$.

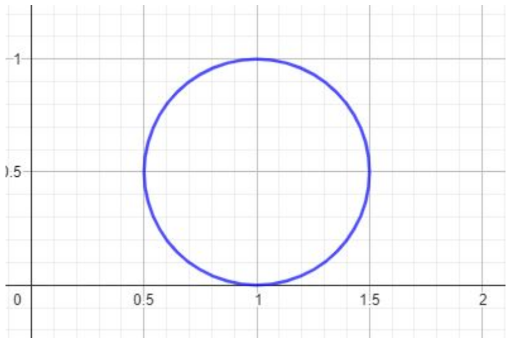
3a) $x^2+y^2=1$ er en sirkel med sentrum i origo og radius 1. Området $x^2+y^2\leq 1$ er dermed området inni denne sirkelen, inkludert sirkelen selv.



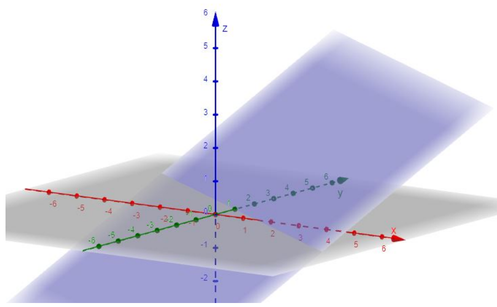
3b) Vi starter med å fullføre kvadratet for x og y

$$\begin{aligned}
x^2+y^2-2x-y+1&=0\\
x^2-2x+1+y^2-y+\frac{1}{4}&=\frac{1}{4}\\
(x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2&=\left(\frac{1}{2}\right)^2
\end{aligned}$$

Dette kjenner vi igjen som en sirkel med sentrum i $\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ og radius $\frac{1}{2}$.



3c) Når man skal tegne et plan for hånd, kan det være lurt å sjekke hvordan skjæringen med xy-, yz- og xz-planet er. For eksempel, sjekker man xy-planet ved å se hva som skjer når $z = 0$. I xy-planet er altså skjæringen gitt ved linjen $2x + 3y = 3 \implies y = -\frac{2}{3}x + 1$, altså en rett linje med konstantledd 1 og stigningstall $-\frac{2}{3}$. Tilsvarende, finner man skjæringen i yz- og xz-planet, som man da kan sette sammen til et plan i xyz-rommet.



4) Vi ser at sentrum er i $(-2, 1)$, og at radiusen er 2. Likningen blir dermed

$$(x + 2)^2 + (y - 1)^2 = 4$$

5) Vi har at $3^2 + 4^2 = 9 + 16 = 25 = 5^2$. Siden sidelengdene oppfyller pytagoras' setning, er dette en rettvinklet trekant med kateter med lengde 3 og 4, så arealet blir $\frac{3 \cdot 4}{2} = 6$.

6) For skalarproduktet gjelder $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = |\mathbf{u}||\mathbf{v}| \cos\theta$ hvor θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot (-5) + (-3) \cdot 1 = 3 - 10 - 3 = -10 \\ |\mathbf{u}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14} \\ |\mathbf{v}| = \sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{9 + 25 + 1} = \sqrt{35} \end{aligned}$$

Dermed blir

$$\theta = \arccos\left(\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{|\mathbf{u}||\mathbf{v}|}\right) = \arccos\left(\frac{-10}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{35}}\right) = 116.9^\circ$$

(arccos er det samme som $\cos^{-1}$)

7) To vektorer er ortogonale dersom skalarproduktet er 0. Skalarproduktet mellom $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = 4\cdot 2 + a\cdot 3 + (-1)\cdot a = 8 + 3a - a = 8 + 2a$$

Vektorene er ortogonale dersom dette er lik 0, altså $8 + 2a = 0 \implies 2a = -8 \implies a = -4$.

8) Vi tar arealet av den store sirkelen minus arealet av de to små

$$\text{areal} = \pi\cdot 4^2 - 2\cdot\pi\cdot 2^2 = 16\pi - 8\pi = 8\pi$$

9a) Vi starter med å finne normalvektoren til planet. Planet er spent ut av vektorene $\mathbf{AB} = (0-1,\ 1-0,\ 2-3) = (-1,\ 1,\ -1)$ og $\mathbf{AC} = (2-1,\ 3-0,\ 2-3) = (1,\ 3,\ -1)$. Vi kan finne en normalvektor ved å ta kryssproduktet mellom disse to vektorene

$$\begin{aligned}
\mathbf{AB}\times\mathbf{AC} &= (1\cdot(-1) - (-1)\cdot 3,\ -\left((-1)(-1) - (-1)\cdot 1\right),\ (-1)\cdot 3 - 1\cdot 1) \\
&= (-1+3,\ -1-1,\ -3-1) \\
&= (2,\ -2,\ -4)
\end{aligned}$$

Vektoren $(1,\ -1,\ -2)$ er parallell med dette kryssproduktet og fungerer dermed også som normalvektor for planet. Vi bruker at punktet $(1,\ 0,\ 3)$ ligger i planet, slik at likningen blir

$$\begin{aligned}
1\cdot(x-1) + (-1)\cdot(y-0) + (-2)\cdot(z-3) &= 0 \\
x - 1 - y - 2z + 6 &= 0 \\
x - y - 2z + 5 &= 0
\end{aligned}$$

9b) Siden planet β er parallelt med α, er også normalvektorene parallelle, så vi kan bruke normalvektoren

$(1, -1, -2)$. Likningen blir

$$\begin{aligned}1 \cdot (x-2) + (-1) \cdot (y - (-5)) + (-2) \cdot (z-5) &= 0 \\ x - 2 - y - 5 - 2z + 10 &= 0 \\ x - y - 2z + 3 &= 0\end{aligned}$$

9c) Siden α og β er parallelle, ligger kula mellom de to planene. Så diameteren til kula er avstanden mellom de to planene. Vi finner punktet Q ved å se på skjæringen mellom planet β og linja som er parallell med normalvektoren til β og går gjennom punktet A. En parameterfremstilling for denne linjen er gitt ved

$$\begin{aligned}&x = 1 + t \\ &y = -t \\ &z = 3 - 2t\end{aligned}$$

(Man finner x-delen av parameterfremstillingen ved å ta x-koordinaten til A pluss t ganget med x-komponenten til normalvektoren. Tilsvarende for y og z.) Så finner vi skjæringen mellom β og denne linjen, ved å putte parameterfremstillingen inn i likningen for planet β

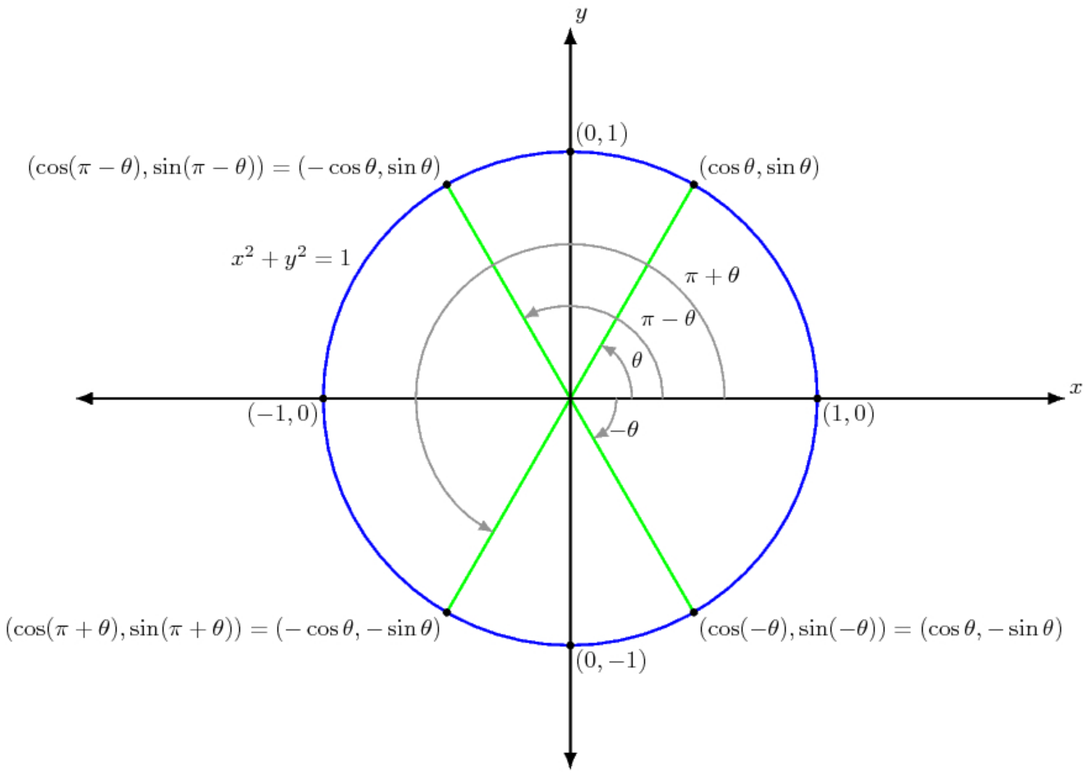
$$\begin{aligned}(1+t) - (-t) - 2(3-2t) + 3 &= 0 \\ 1 + t + t - 6 + 4t + 3 &= 0 \\ 6t - 2 &= 0 \\ \implies t &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

Så Q er gitt ved

$$\begin{aligned}&x = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3} \\ &y = -\frac{1}{3} \\ &z = 3 - 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{7}{3}\end{aligned}$$

Altså $Q = \left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$.

10) Her er en figur som oppsummerer



11) Kryssproduktet mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er gitt ved

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = (u_2v_3 - v_2u_3,\; v_1u_3 - u_1v_3,\; u_1v_2 - v_1u_2)$$

Vi starter med å vise at det står normalt på $\mathbf{u}$ ved å vise at skalarproduktet er 0.

$$\begin{aligned}
\mathbf{u} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (u_1,\; u_2,\; u_3) \cdot (u_2v_3 - v_2u_3,\; v_1u_3 - u_1v_3,\; u_1v_2 - v_1u_2) \\
&= u_1(u_2v_3 - v_2u_3) + u_2(v_1u_3 - u_1v_3) + u_3(u_1v_2 - v_1u_2) \\
&= u_1u_2v_3 - u_1v_2u_3 + u_2v_1u_3 - u_2u_1v_3 + u_3u_1v_2 - u_3v_1u_2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

For $\mathbf{v}$ får vi

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) &= (v_1,\, v_2,\, v_3) \cdot (u_2v_3 - v_2u_3,\, v_1u_3 - u_1v_3,\, u_1v_2 - v_1u_2) \\
&= v_1(u_2v_3 - v_2u_3) + v_2(v_1u_3 - u_1v_3) + v_3(u_1v_2 - v_1u_2) \\
&= v_1u_2v_3 - v_1v_2u_3 + v_2v_1u_3 - v_2u_1v_3 + v_3u_1v_2 - v_3v_1u_2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$